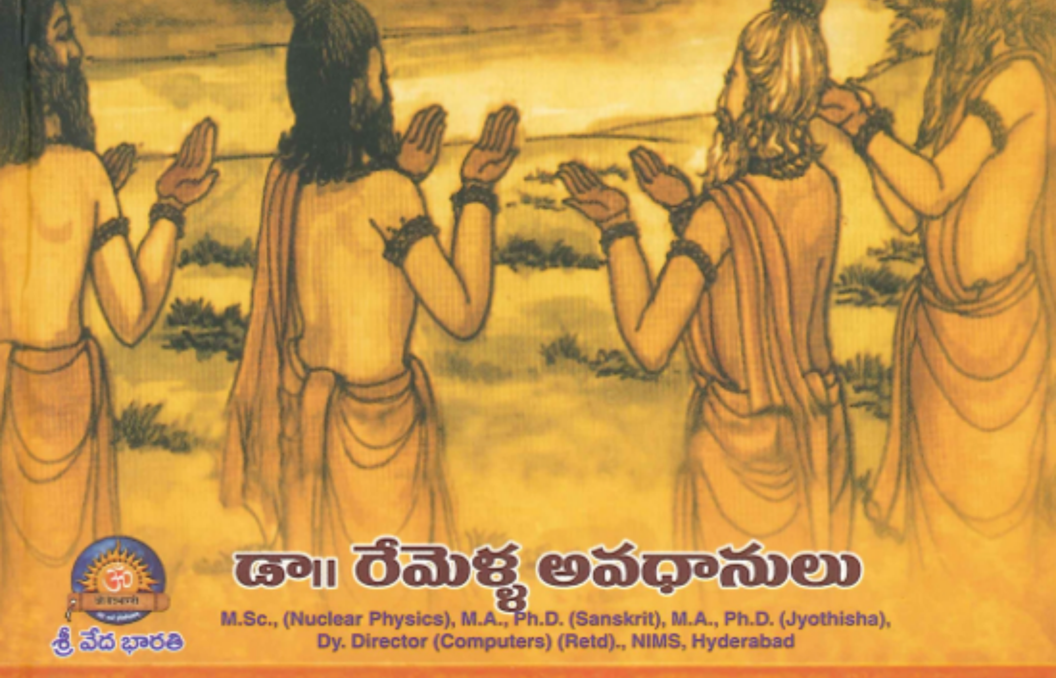
వేదగణితం,
లీలావతీగణితం &
పావులూరిగణితం



డా॥ రేమెళ్ల అవధానులు

M.Sc., (Nuclear Physics), M.A., Ph.D. (Sanskrit), M.A., Ph.D. (Jyothisha),
Dy. Director (Computers) (Retd)., NIMS, Hyderabad

శ్రీ వేద భారతి

"సరస్వతీ శ్రుతిమహతీ మహీయతామ్"

వేదగణితం,
లీలావతీగణితం &
పావులూరిగణితం

"వాచస్పతి" "సంస్కృత మిత్ర"

డా॥ రేమెళ్ళ అవధానులు

M.Sc. (Nuclear Physics), M.A., Ph.D (Sanskrit), M.A., Ph.D. (Jyotisha), D.Litt. (Hon)
Dy. Director (Computers), (Retd)., NIMS, Hyderabad.

శ్రీ వేదభారతి

2015

వేద గణితం

డా॥ రేమెళ్ళ అవధానులు

మొదటి ముద్రణః 2003

తొమ్మిదవ ముద్రణః 2015

కాపీరైట్ ః సర్వహక్కులు రచయితవి

వెల ః రు. 500/-

ప్రతులకు ః

శ్రీ వేదభారతి

హెచ్.నెం. హెచ్ బ్లాక్-34, మధురానగర్,

హైదరాబాద్ - 500 038.

ఫోన్ ః 9849459316

e.mail : shrivedabharathi@gmail.com

www.shrivedabharathi.in

ముద్రణ :

విషయసూచిక

భాగం - 1

1. వేదాలలోని గణిత విజ్ఞానం 1
2. కూడికలు (బింద్వంకన పద్ధతి) 9
3. తీసివేతలు (బింద్వంకన పద్ధతి) 12
4. గుణకారములు-1 (ఏకాధికేన పూర్వేణ) 15
5. గుణకారములు-2 (అంత్యయోర్దశకేపి) 18
6. సంఖ్యాపూరకములు (నిఖిలం నవతః చరమం దశతః) 20
7. గుణకారములు-3 (ఏకన్యూనేన పూర్వేణ) 21
8. గుణకారములు-4 (నిఖిలం) 26
9. గుణకారములు-5 (ఆనురూప్యేణ) 33
10. గుణకారములు-6
(యావదూనం తావదూనీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్) 40
11. గుణకారములు-7
(యావదధికం తావదధికీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్) 43
12. గుణకారములు-8 (ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్) 45
13. గుణకారములు-9 (ద్వంద్వ యోగః) 50

భాగం - 2

14. వింకులం సంఖ్యలు 58
15. ఘనములు-1 (యావదూనం) 71
16. ఘనములు-2 (ఆనురూప్యేణ) 75
17. భాగహారములు-1 (ఏకాధికేన పూర్వేణ)-కుడివైపు నుండి 79

18. భాగఫలంలోని అంకెలలో 'లయ' బద్ధత 84
19. భాగహారములు-2 (ఏకాధికేన పూర్వేణ)-ఎడమవైపు నుండి 86
20. భాగహారములు-3 (నిఖిలం) 88
21. భాగహారములు-4 (విలోకనమ్) 92
22. గుణకారములు-10 (కర్ణపద్ధతి) 97

భాగం - 3

23. వేదాలలో దశాంశ విధానం 104
24. వేదాలలో దశాంశ విధానం-సంఖ్యల పేర్లు 112
25. లీలావతీ గణితంలో దశాంశ విధానం - సంఖ్యల పేర్లు 113
26. వాల్మీకి రామాయణంలో దశాంశ విధానం - సంఖ్యల పేర్లు 115
27. గుణకారములు-11 (మేరుప్రస్తారం) 117
28. గుణకారములు-12 (వింకులం-ఎక్కాలు) 123
29. గుణకారములు-13 (8తో) 128
30. గుణకారములు-14 (9తో) 130
31. గుణకారములు-15 (11 మరియు 111 సంఖ్యల వర్గాలు) 132
32. గుణకారములు-16 (22 మరియు 222 సంఖ్యల వర్గాలు) 135
33. గుణకారములు-17 (11తో) 137
34. గుణకారములు-18 (12 మరియు 13తో) 142
35. గుణకారములు-19 (11 మరియు 101 సంఖ్యల వర్గాలు) 145
36. గుణకారములు-20 (9 మరియు 18తో) 147
37. గుణకారములు-21 (25తో) 150
38. అక్షహృదయము 151
39. సంఖ్యలలో స్థానాల విలువ 152

40. అనంతము (లీలావతి) 154
41. అచ్చులు - హల్లులు 155

భాగం - 4

42. సంస్కృత భాషలో సంఖ్యలలోని అంకెలు వ్రాసే పద్ధతి 158
43. కటపయాది విధానం - 1వ పద్ధతి 159
44. కటపయాది విధానం - 2వ పద్ధతి 162
45. వేదాంతశాస్త్రంలో కటపయాది సంఖ్యలు 169
46. సంగీత శాస్త్రంలో కటపయాది సంఖ్యలు 171
47. చదరములలో కటపయాది సంఖ్యలు-1 173
48. చదరములలో కటపయాది సంఖ్యలు - 2 176
49. కటపయాది విధానం - 3వ పద్ధతి 180
50. కటపయాది విధానంతో గ్రహాల భ్రమణాల సంఖ్యలు 184
51. వారాల పేర్లు ఎట్లు వచ్చాయి? 187
52. ప్రసిద్ధమైన పదములను సంఖ్యలుగా వినియోగించుట (భూతసంఖ్యా విధానము) 191
53. గుణకారములు (పావులూరి) 197

భాగం - 5

54. శాశ్వత దినదర్శిని-1 (శ్రీయుత వేదగిరి) 212
55. శాశ్వత దినదర్శిని-2 (శకుంతలాదేవి) 217
55. శాశ్వత దినదర్శిని-3 228
57. గుణకారములు (లీలావతిలోని పద్ధతులు) 232
58. భాస్కరాచార్యుని విద్వత్తు 240

59. భాగహారములు–5 (39 మరియు 49 మొ॥ సంఖ్యలతో) 242
60. అభేద్య సంఖ్యలు 247
61. వేదములో 19, 29, 39, 49 వంటి సంఖ్యల ప్రస్తావన 248
62. అంకెలు–లక్షణాలు & సంఖ్యలు–స్వభావాలు–1 249
63. వేదాంత శాస్త్రములో అంకెలు–వాటి సంకేతాలు 254
64. అంకెలు–లక్షణాలు & సంఖ్యలు–స్వభావాలు–2 (పావులూరి)255
65. నిశ్శేష భాగహారములు 262

భాగం - 6

66. భాగహారములు – 6 (పాటీ గణితం) 266
67. భాగహారములు – 7 (పావులూరి ఉదాహరణలు) 269
68. భాగహారములు – 8 (లీలావతి–భాగహార సూత్రం) 276
69. భాగహారములు – 9 (లీలావతి–సూక్ష్మీకరణ) 278
70. ప్రాచీన భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్తలు 279
71. భారతీయ గణితశాస్త్ర సిద్ధాంతాలు 281
72. వర్గములు – 1 (లీలావతి–కృతి) 284
73. వర్గములు – 2 (లీలావతి–కుడివైపు నుండి) 285
74. వర్గములు – 3 (లీలావతి–ఎడమవైపు నుండి) 293
75. వర్గములు – 4 (లీలావతి–సంఖ్యను రెండు భాగములుగా చేసి) 296
76. వర్గములు – 5 (లీలావతి–కలుపుట, తీసివేత పద్ధతి) 300
77. వర్గ మూలములు – 1 (లీలావతి–కారణాంక పద్ధతి) 303
78. వర్గ మూలములు – 2 (లీలావతి–సాధారణ పద్ధతి) 305
79. వర్గ మూలములు – 3 (పట్టిక పద్ధతి–పదివేలలోపు సంఖ్యలకు) 317
80. వర్గ మూలములు – 4 (పట్టిక పద్ధతి–పదివేల నుండి నలభైవేలమధ్య సంఖ్యలకు) 323
81. వర్గ మూలములు – 5 (పట్టిక పద్ధతి–పదివేల నుండి పదిలక్షల లోపు సంఖ్యలకు) 331

భాగం - 7

82. ఘనములు - 3 (లీలావతి-అంకెలను గుర్తించుటద్వారా) 341

83. ఘనములు - 4 (లీలావతి-సంఖ్యను రెండు భాగములుగా చేసి) 350

84. ఘనములు - 5 (లీలావతి-సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం ద్వారా) 353

85. ఘనమూలములు - 1 (కారణాంక పద్ధతి) 355

86. ఘనమూలములు - 2 (లీలావతి-సాధారణ పద్ధతి) 356

87. ఘనమూలములు - 3 (గ్రూపు పద్ధతి) 375

88. ఘనమూలములు - 4 (ఆరంకెలవరకు గల సంఖ్యలకు) 381

89. ఘనమూలములు - 5 (తొమ్మిదంకెలవరకు గల సంఖ్యలకు) 387

90. చతుర్ధ ఘాతాంకమూలములు 394

91. పంచమ ఘాతాంకమూలములు - 1 (సాధారణ పద్ధతి) 395

92. పంచమ ఘాతాంకమూలములు - 2 (పట్టిక పద్ధతి) 397

93. అనుబంధం 401

భాగం–1

1. వేదాలలోని గణిత విజ్ఞానం

ఉపోద్ఘాతం

వేదమంటే జ్ఞానమని అర్థం. తెలుసు కొందామనుకొనే జిజ్ఞాసువులకు కావలసిన ఏ రకమైన విషయ జ్ఞానమైనా, అంటే పారమార్థికమైనదైనా, లేక లౌకికమైనా ఇక్కడ లభిస్తుందని భావం. భారతీయుల విశ్వాసం ప్రకారం వేదములు శాశ్వతమైనవి, నిత్య సత్యమైనవి. ప్రాచీన కాలంలో మహర్షులు సమాధి స్థితిలో ఉండి తపస్సు చేసుకొంటూ ఉన్నప్పుడు వారు దర్శించినవే వేద మంత్రాలు. వేలాది మంది మహర్షుల ద్వారా లక్షలాది మంత్ర వాక్యాలు బహిర్గతమయ్యాయి.

వీటన్నింటినీ శ్రీ వేదవాస మహర్షి ప్రధానంగా 4 వేదాలుగా విభజించారు. ఈ నాలుగు వేదాలకు మొత్తం మీద 1131 శాఖలు ఉండేవి. కాని ఈ రోజున మొత్తం మీద 13 శాఖలే లభిస్తున్నాయి. అందులో నేడు 7 శాఖలు మాత్రమే అధ్యయనంలో ఉన్నాయి. అంటే సుమారు 1 శాతం మాత్రమే ఉన్నాయి. 99 శాతం పోగొట్టుకొన్నాము. ఈ ఒక శాతం వేద వాఙ్మయం లోను ఉన్న విషయాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికే చాలా శ్రమ పడవలసి వస్తోంది. కారణం అందులో యజ్ఞాలు, మోక్షం మొదలయిన పారలౌకిక విషయాలతో బాటు, గణితము, భౌతిక శాస్త్రం, రసాయనశాస్త్రం, జీవశాస్త్రం, జ్యోతిషం, విమాన శాస్త్రం మొదలయిన అనేక విషయాల ప్రస్తావన అతిగహనంగా ఉంది. ఇవికాక, ఆరోగ్యానికి సంబంధించిన ఆయుర్వేదం, భవన నిర్మాణాలకు సంబంధించిన స్థాపత్యవేదం మొదలయిన ఉపవేదాలు శాస్త్రీయ విషయాలనుచాలా ఎక్కువగా వివరించాయి.

వేదాలలోని విషయాలను అర్థం చేసుకోవడానికి వేదాంగాల పరిశీలన ఎంతైనా ఆవశ్యకం. అవి చదివితేనే గాని, వేదంలో వాడే పారిభాషిక పదాలు, వాటి అర్థాలు అర్థం కావు. కాని ఈ వేదాంగాలు, వేదాలు కూడా గణితానికి చాలా ప్రాధాన్య మిచ్చాయి. వేదాలలో ఉన్న గణితాన్ని వివరిస్తూ, విపులీకరిస్తూ అనేక గ్రంథాలు పూర్వకాలంలోనే వ్రాయబడ్డాయి. ఈ గ్రంథాలను రచించిన వారిలో ముఖ్యులు బోధాయన మహర్షి, గర్గ మహర్షి, మేధాతిథి, పరాశరుడు, కశ్యపుడు, మయుడు, బృహస్పతి, తరువాత కాలంలోని ఆర్యభట్టు, వరాహమిహిరుడు, భాస్కరుడు మొదలయినవారు ఈ కోవకు చెందిన వారే. పరంపరగా వచ్చిన ఈ వేద గణితము ఈ దేశం నుండి అరేబియా దేశానికి వెళ్ళినట్టుగా అనేకమంది చరిత్రకారులు

ఉద్ఘాటించారు. క్రీ.శ. 770 ప్రాంతంలో ఉజ్జయిని నివాసి అయిన కంకుడు అనే హిందూ పండితుడు ఖరీఫ్ ఆల్ మంసూర్ చేత బాగ్దాదు సభకు ఆహ్వానించబడి, అక్కడి అరబ్ విద్వాంసులకు మన గణితాన్ని జ్యోతిష్యాన్ని బోధించినట్లు తెలుస్తోంది. ఇతని సహాయంతోనే బ్రహ్మగుప్తుని బ్రహ్మస్ఫుట సిద్ధాంతాన్ని, అరేబియా భాషలోకి తర్జుమా చేశారు. అసలు సిరియాలో క్రీ.శ. 7వ శతాబ్దినాటికే హిందూ అంకెలు వాడుకలో ఉన్నట్లు ఫ్రెంచి దేశపు శాస్త్రవేత్త M.F.Nev అభిప్రాయ పడినట్టుగా Prof. Jens Beg. తన "On new light on our numerals" అనే వ్యాసంలో వ్రాశాడు. ఈ విధంగా ప్రపంచం అంతటా ప్రచారం పొందిన భారతీయ వేద గణితంలోని కొన్ని ముఖ్య ఘట్టాలు ఈ క్రింద వివరించబడటం జరిగింది.

1. అంకెలతో ప్రారంభమయిన వేద గణితం

(ఎ) గణితానికి పునాదులు 1,2,3,4 మొదలైన అంకెలు. ఈ అంకెలకు సంబంధించిన మంత్రాలు చాలా చోట్ల కనిపిస్తాయి.

ఉదాహరణకు కృష్ణయజుర్వేదంలోని 7వ కాండలోని 2వ పన్నంలో ఉన్న మంత్ర వాక్యం.

ఏకస్మై స్వాహా ద్వాభ్యాగ్ స్వాహా త్రిభ్యః స్వాహా చతుర్భ్యః స్వాహా పఞ్చభ్య స్వాహా షడ్భ్యః స్వాహా సప్తభ్యఃస్వాహా అష్టాభ్యః స్వాహా నవభ్యః స్వాహా దశభ్యః స్వాహైకాదశభ్యః స్వాహా..... (కృ. య. సం 7-2-11)

(బి) హోమాలు చేసేటప్పుడు ఎన్నిసార్లు చేశారో తెలియడానికి (ఏకం, ద్వే, త్రీణి, చత్వారి....) అని లెక్కబెట్టడం ఈ వేళకు కూడా ఉంది.

2. సరిసంఖ్యలు, బేసి సంఖ్యలు

అంకెలను ప్రధానంగా రెండు వర్గాలుగా విభజించవచ్చు. మొదటి వర్గం సరిసంఖ్యలు, రెండవ వర్గం బేసి సంఖ్యలు. దీనికి సంబంధించిన ఒక మంత్రం కూడా పై ప్రకరణంలోనే కన్పిస్తుంది.

ఏకస్మై స్వాహా త్రిభ్యః స్వాహా పఞ్చభ్యః స్వాహా సప్తభ్యః స్వాహా నవభ్యః స్వాహా... (కృ యం.సం. 7-2-12).

ద్వాభ్యాగ్ం స్వాహా చతుర్భ్యః స్వాహా షడ్భ్యః స్వాహా 2ష్టాభ్యః స్వాహా దశభ్యః స్వాహా ద్వాదశభ్యః స్వాహా... (కృ.య.సం. 7-2-13).

3. స్థానం-విలువ-సంఖ్యామానం దశాంశ విధానం

ఈ రోజు కూడా ప్రపంచం అంతటా ప్రచారంలో ఉన్న దశాంశ విధానం వేదాలలో అనేకచోట్ల కన్పిస్తుంది. ఒకట్లు, పదులు, వందలు, వేలు, పదివేలు పద్ధతిలో 1 తర్వాత ఒక్కొక్క సున్న చేరిస్తే విలువ 10 రెట్లు పెరుగుతుంది అన్న విషయంపైన ఆధారపడిందే దశాంశ విధానం. ఈ విధానంలో కొన్ని కొన్ని స్థానాలకు మన తెలుగులోను, ఇంగ్లీషులోను వాడిన పేర్లనే కలుపుకుంటూ స్థానాల విలువను వ్యక్తం చేస్తారు. ఉదాహరణకు పదివేలలో అంతకు ముందు వచ్చిన పది, వేయి అనుపదాలు వాడుకొని క్రొత్త స్థానాన్ని వివరిస్తున్నాము. కాని వేదగణితంలో పదివేలు, పది లక్షలను విడివిడిగా సూచించడానికి ప్రత్యేక పదాలు ఉన్నాయి.

ఋగ్వేదంలో, యజుర్వేదంలో, మరియు అథర్వణ వేదంలో వందలాది మంత్రాలతో సంబంధం ఉన్న మేధాతిథి అనే మహర్షిని ఈ సందర్భంగా చెప్పకుండా ఉండలేము. అతడు దర్శించిన వాటిల్లో దశాంశ విధానాన్ని ప్రాతిపదికగా పెట్టుకొని ఒకటి లగాయతు 10^{12} వరకు (లక్ష కోట్ల వరకు) చెప్పిన మంత్రం కన్పిస్తుంది.

ఏకాచ దశ శతం చ సహస్రం చాయుతం చ నియుతంచ ప్రయుతం చార్బుదంచ న్యర్బుదంచ సముద్రంచ మధ్యం చాంతశ్చ పరార్ధశ్చ .....

అట్లాగే వేరొకచోట ఒకటి లగాయతు 10^{19} వరకు (లక్ష కోటి కోట్ల వరకు) చెప్పింది కూడా ఉన్నది.

చిత్ర భిన్నాలు

భిన్నాలలో 1/19, 1/29, 1/39, 1/49 మొదలయిన వాటి ఫలితాంశం (భాగఫలం) కొన్ని అంకెల తర్వాత మళ్ళీ మళ్ళీ ఆవృత్తి అవుతుంది. ఈ భాగఫలాన్ని కట్టడం కొంచెం విసుగుతో కూడిన పని. ఎందుకంటే అంకె తర్వాత సున్నాలు దించుకోవడం, అందులో హారము పోతుందో పోదో చూడడం, పోతే ఎన్నిసార్లు పోతుందీ చూడటం, పోకపోతే ఇంకో సున్నా దించుకోవడం - ఇట్లా భిన్నాలను ఏమీ శ్రమ లేకుండా "ఏకాధికేన పూర్వేణ" అనే సూత్రంతో ఖాళీలను పూరించే విధానంతో చాలా సులువుగా భాగఫలాన్ని సాధించవచ్చు. (వివరాలకు శ్రీ

వేదగణితం–ద్వితీయభాగం చూడగలరు). ఎందుకో తెలియదుగాని, ఈ అంకెలను ఇదే వరుసలో ఒక వేద మంత్రంలో పేర్కొనడం కన్పిస్తుంది.

ఏకాన్న విగ్ం శత్యై స్వాహా నవవిగ్ం శత్యై స్వాహైకాన్న చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా..... (కృ.యు.సం. 7-2-14).

దానిని బట్టి ఈ భిన్నాల విశిష్టతత్వాన్ని వారు పూర్వమే గ్రహించి ఉంటారని అనుకోవడానికి అవకాశం బాగా ఉంది.

వేద గణిత మంత్రాల పరిధి

వేద గణిత గ్రంథంలో వివరించబడిన సూత్రాలు ఒక్క బీజగణితానికి (Algebraకు) మాత్రమే కాకుండా, జ్యామితి(Geometry), త్రికోణమితి (Trigonometry) మొదలయిన గణిత విభాగాలకు కూడా వర్తిస్తాయి.

వేదాలలో జ్యోతిష గణనము

గణితాన్ని గణితం కోసమే కాక, కాల నిర్ణయానికి కూడా వాడేవారు. అసలు యజ్ఞము ఎప్పుడు చేయాలి అనే కాల నిర్ణయానికి జ్యోతిష్యాన్ని (అసలు జ్యౌతిషం అనాలి) ప్రధానంగా పెట్టుకొని గ్రహగతులను అర్థం చేసుకొని వాటి స్థితులను నిర్ణయించి దానిని బట్టి యాగకాలాలను నిర్ణయించేవారు. ఈ ప్రక్రియ అంతా గణితంపైనే ఆధారపడి ఉంది. కోట్లాది మైళ్ళ దూరంలో ఉన్న నక్షత్ర మండలాలను, వాటిలోని అంతర్భాగాలను, వాటి లక్షణాలను తెలుసుకోవడానికి ఈ గణితాన్ని ఎట్లా వృద్ధి చేశారా అని ఆలోచిస్తే ఆశ్చర్యం వేస్తుంది. ఈ వేదాంగ గణితానికి బాగా ప్రాచుర్యం తెచ్చినవారు గర్గమహర్షి, నారదుడు, బృహస్పతి, పరాశరుడు, కశ్యపుడు, మయుడు, తర్వాతి కాలాలనాటి లగధుడు, వరాహమిహిరుడు మొదలయినవారు ఈ గణితంలో చాలా అత్యున్నతస్థాయిలో కృషి చేశారు.

సాంఖ్యశాస్త్రము(Statistics)

నక్షత్రాలు, గ్రహాలు మొదలైన వాటి గమనాలు... సమాజం పై వాటి ప్రభావాలు అనే విషయంపై కూడా వేదవాఙ్మయంలో ఆధారాలు లభిస్తున్నాయి.

ఉదాహరణకు, ప్రస్తుతము ఉన్న గ్రహగతులనుబట్టి రాబోయే సంవత్సరంలో వర్షపాతం ఎట్లా ఉంటుంది ? ధరవరలు ఎట్లా ఉండవచ్చు? తుఫానులు రావడానికి

అవకాశాలు ఏమిటి మొదలగు అనేక విషయాలపై వివరణలిచ్చే సాంఖ్య శాస్త్రానికి ఆశ్వాసం వేదం మాత్రమే.

వేదాలలో జ్యామితి (Geometry)

శుల్బ సూత్రాలు

వేద మంత్రాలకు ఎక్కువ వినియోగం యజ్ఞాలలోనే. వీనిలో యజ్ఞ వేదికలు రకరకాల ఆకారాలతో వర్ణించబడ్డాయి. కొన్ని చతురస్రమైనవి. మరికొన్ని దీర్ఘ చతురస్రం, వృత్తం, అర్ధవృత్తం, సమబాహు త్రిభుజాలు మొదలయినవి. ఇవేకాక, యజ్ఞవేదికలలో వాడే ఇష్టకల సంఖ్య (అంటే ఇటుకల సంఖ్య) వాటి పరిమాణాలు కూడా గణితం ద్వారానే తెలిపారు. కొన్నిచోట్ల భిన్న భిన్న ఆకారాలు కలిగి, ఒకే వైశాల్యం ఉన్న యజ్ఞవేదికల నిర్మాణం కూడా విరివిగా కన్పిస్తాయి. ఇవన్నీ "శుల్బ సూత్రాలు" అనే గ్రంథాలలో లభిస్తాయి. ఆరు వేదాంగాలలో ఒకటైన కల్పసూత్రాలలో శ్రౌతం ఒక భాగం. ఈ శ్రౌతానికి అనుబంధంగా శుల్బ సూత్రాలు ఉంటాయి. అతి ప్రాచీన కాలంలో ప్రతీ వేదానికీ విడివిడిగా శుల్బ సూత్ర గ్రంథాలు ఉండేవిట. కాని ప్రస్తుతానికి 7 గ్రంథాలు మాత్రమే లభిస్తున్నాయి. అవి బోధాయన, ఆపస్తంబ, కాత్యాయన, మాణవ, మైత్రాయణ, వరాహ, వాధూల మహర్షుల పేర్లమీద ఉన్నాయి. వీటి అన్నింటిలో "బోధాయన శుల్బ సూత్రాలు" అనే గ్రంథం మిగిలిన అన్నిటికంటే పెద్దదీ, ప్రాచీనమయినదీనూ, ఇది కృష్ణ యజుర్వేదానికి అనుబంధమైన గ్రంథం. ఆధునికుల కాలనిర్ణయం ప్రకారం ఈ మహర్షి క్రీ.పూ. (300 – 500) సంవత్సరాల మధ్యకాలంలో ఉండి ఉండాలి. ఈ గ్రంథంలో 3 భాగాలు ఉన్నాయి. మొదటి భాగంలో 116 సూత్రాలు. రెండవ భాగంలో 83, మూడవ భాగంలో 323 సూత్రాలు ఉన్నాయి. ఈ సూత్రాలలో వృత్త వైశాల్యాలను వర్గీకరించడం, జ్యామితికి సంబంధించిన ఒక ఆకారాన్ని తీసికొని, అదే వైశాల్యం కల వేరొక ఆకారాన్ని తయారుచేయడం మొదలైన అనేక విషయాలు కన్పిస్తాయి.

ఉదాహరణకు ఒక సూత్రం ఇలా వివరిస్తుంది.

"ఒక దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణంమీద ఆధారడి వచ్చిన వైశాల్యము మిగిలిన రెండు భుజాల మీద ఏర్పడే వైశాల్యం మొత్తానికి సమానం." ఇదే మనం ఈ రోజు పైథాగరస్ పేరు మీదుగా చెప్పుకుంటున్న సిద్ధాంతము. పైథాగరస్ కంటే అనేక శతాబ్ధాల

ముందే బోధాయనునికి, అతని పూర్వీకులకూ, కూడా ఈ సిద్ధాంతము తెలిసే ఉంటుంది అని అనడంలో అతిశయోక్తి ఏమీ లేదు.

సమితి సిద్ధాంతము (Set Theory)

వేద వాక్యాలలో గణితానికి సంబంధించిన ప్రస్తావన కూడా ఉంది.

ఒకానొక ఇష్టిలో నాలుగు నాలుగు చొప్పున గురివింద గింజలతో సమానమైన హిరణ్యములను జుహువునందు ఉంచవలెను అనే చోట "చత్వారిచత్వారి కృష్ణలాని" అనే వచనం కనిపిస్తోంది.

సంఖ్యావాచకాలకు అనేక సంఖ్యాత్వం

వేద మంత్రాలలో కొన్నికొన్ని సంఖ్యలు, బహు వచనార్థకంలో కూడా వాడబడ్డాయి.

ఉదాహరణకు శత రుద్రీయం, సహస్ర రశ్మిః మొదలయినవి. ఇక్కడ శతరుద్రీయం అంటే వందమంది రుద్రులకు అని కాక వందలాది మంది రుద్రులకు అంటే అనేకులకు సంబంధించింది అనే తాత్పర్యంలో శతం అనే పదాన్ని వాడటం జరిగింది. అదే విధంగా సహస్రరశ్మిః అంటే వేయి కిరణములు కలవాడు అనికాక, వేలాది కిరణాలు (అంటే చాలా కిరణాలు) కలవాడు అనే అర్థంలో ఈ సంఖ్యా వాచకాలు వాడబడ్డాయి.

అంకెలతో అలంకారాలు

రెండు వేర్వేరు సంఘటనలకు అంకెలతో పోలిక ఉంటే ఆ రెండు సంఘటనలనూ అలంకారికంగా వర్ణించడం వేదంలో ఒక విశిష్టత.

ఉదాహరణకు అగ్నీధము అనే ఒక ప్రక్రియలో 6 అంతర్భాగాలు ఉన్నాయి. ఈ ఆరు అంతర్భాగాలను అగ్నికి 6 ముఖాలుగా చెబుతారు. అక్కడ చెప్పబడినట్లుగా ఈ 6 అంతర్భాగాలనూ పూర్తి చేస్తే అగ్ని యొక్క 6 ముఖాలనూ తృప్తి చెందినట్లుగా భావన.

కాని ఈ ఆరు అనే సంఖ్య ఒక సంవత్సరంలోని ఋతువుల యొక్క సంఖ్య అని స్ఫురింపచేస్తుంది. అందుచే ఋతువులు అగ్ని ముఖాలే అని చెప్పి రూపకాలంకారాన్ని ప్రదర్శిస్తారు. ఆ రకంగా అంకెలతో అలంకారాలను కూడా సాధించారు.

ఛందస్సులలో గణితం

వేదాలలోని చాలా మంత్రాలు రకరకాలైన ఛందస్సులకు చెందినవి. ఉదాహరణకు, గాయత్రీ ఛందస్సు, జగతీ ఛందస్సు, త్రిష్టుప్ఛందస్సు మొదలయినవి. ఒక్క కృష్ణ యజుర్వేద సంహితలోనే 80 పైగా ఛందస్సులు వాడబడి ఉన్నాయి. ప్రతీ ఛందస్సుకీ కూడా అక్షరాల సంఖ్య, గురు, లఘు విభజన ప్రధానమని అందరికీ తెలిసిందే. ఆ రకంగా వేదాలలోని ఛందస్సులలో గణితం ప్రధాన పాత్రను తీసుకుంది.

సమాసాలలో గణితం

అన్ని భాషలకంటే విశిష్టంగా సంస్కృత భాషలో ఉన్నవి సమాసాలు. చాలా రకాల సమాసాలు ఉండగా, గణితంతో సంబంధం ఉన్న సమాసాన్ని కూడా సంస్కృతంలో (గణితాన్ని వదలలేక) ప్రవేశపెట్టారు. అదే ద్విగుసమాసం.

ఉదాహరణకు అష్టాక్షరాగాయత్రీ, ఏకాదశకపాలం మొదలైన మంత్ర వాక్యాలలో ద్విగుసమాసం దర్శనమిస్తూ ఉంటుంది.

ఆశీస్సులలో కూడా గణితమే

చివరకు చిన్న వాళ్ళను ఆశీర్వదించేందుకు కూడా సంప్రదాయం ప్రకారం మనవాళ్ళు సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తూనే ఆశీర్వదిస్తారు ఉదాహరణకు.

శతమానం భవతి శతాయుః పురుషః

ఈ విధంగా గణితం వేదవేదాంగాలలో చాలా విస్తృతంగా వ్యాపించి ఉంది. కాని వాటి ప్రయోగ విధానాలు. పారిభాషిక పదాలు, సాంకేతిక పదాలూ ఈ నాటి సరళికంటే భిన్నంగా ఉంటాయి. దీనితో చాలా సులభమైన మార్గాలలో సమస్యలను పరిష్కరించగల్గేవాళ్ళు. మన పిల్లలకు ఆధునికమైన బండ పద్ధతుల ద్వారా కాకుండా ప్రాచీనమైన సులభ పద్ధతుల ద్వారా లెక్కలను సాధించే విధానాలను పిల్లలకు ఆసక్తికరంగా బోధిస్తే తక్కువ శ్రమతో, ఎక్కువ ఫలితాలను అతి త్వరగా సాధించగల్గుతారు. అందుచే వేదాలలోని గణితాన్ని గూర్చి సాధ్యమైనంత ఎక్కువగా పరిశోధన చేయాలి. ప్రచారం చేయాలి.

గణిత శాస్త్రంలో కూడికలు, తీసివేతలు, గుణకారాలు, భాగహారాలు అతి ప్రసిద్ధమైన ప్రక్రియలు. ఇవి కాక ఘాతాలు, వర్గమూలాలు, సమీకరణాలు మొదలైన

ప్రక్రియలు చాలా ఉన్నాయి. ఈ ప్రక్రియలు హైస్కూలు, కాలేజీలలో చదివే విద్యార్థులందరికీ భాగా పరిచితమే. కాని పాఠశాలలో నేర్పుతున్న విధానాల కంటే చాలా సులభమైన విధానాలను మన పూర్వీకులు మనకు అందించారు. ఆ విశేష విషయాలను ఒక్కొక్కటే పరిశీలిద్దాం!

ఈ సందర్భంలో కొన్ని గమనికలు

1. పూర్వుల గణిత విజ్ఞానాన్ని ముఖ్యంగా వేద శాస్త్రాలలో ప్రస్తావించబడిన, లేక వివరింపబడిన గణితాన్ని సాధ్యమయినంతవరకూ అందించడమే ఈ వ్యాసావళికి ప్రయోజనం. తర్వాతికాలాల్లో రచించబడిన భారతీయగణిత గ్రంథాల్లోని విషయాలను కూడా స్పృశించడం జరిగింది. శ్రీ పూరీ శంకరాచార్య శ్రీశ్రీశ్రీ భారతీ కృష్ణ తీర్థ గారిచే రచించబడిన 'వేద గణితం'లోని విషయాలను ప్రధానంగా వివరించడం జరిగింది. పావులూరి గణితం, లీలావతీ గణితం, ఆర్యభటీయం మొదలైన గ్రంథాలలోని కొన్ని అంశాలను వివరించడం జరిగింది.

2. దీనిని ముఖ్యంగా చిన్న పిల్లలను దృష్టిలో పెట్టుకొని సులభంగా అర్థమయ్యేట్లా వ్రాయడానికి ప్రయత్నం జరిగింది. అయితే విషయం తెలియని పెద్దలు కూడా పిల్లలతో సమానమేనని కొందరు అంటారు.

3. ప్రాచీనుల పారిభాషిక పదాలను పరిచయం చేయడం కూడా ఆశించిన ప్రయోజనాల్లో ఒకటి.

4. ఒక వరుసలో వివరించడం కోసం పూర్వమే బాగా తెలుసున్న కొన్ని విషయాలను కూడా వివరించడం సంభవించింది. అటువంటి చోట్ల పాఠకులు వాటిని దాటి ముందుకు వెళ్ళవచ్చును.

5. వివరించడంలో వ్యావహారికానికి దగ్గరగా ఉండే భాషను వాడాము. నిత్య వ్యవహారంలో మనం తెలుగు పదాల కంటె ఇంగ్లీషు పదాలకే ఎక్కువ అలవాటు పడ్డాము. సంస్కృతాంగ్ల పదాలకు సరైన తర్జుమా చేస్తే, అసలు ప్రయోజనం దెబ్బతినే అవకాశం ఉండడంతో, అయిష్టమైనా ఇంగ్లీషు పదాలను విరివిగా వాడడం జరిగింది. దీనివలన కొన్ని సౌకర్యాలు లేకపోలేదు.

2. కూడికలు (బింద్వంకన పద్ధతి)

"బింద్వంకన పద్ధతి"

వివరణ : రెండు సంఖ్యల విలువలను కలిపే పద్ధతిని కూడిక అంటారు. దీనినే సంస్కృతంలో "సంకలనం" అంటారు. ఇది అన్ని ప్రక్రియలలోనికి చాల సులభమైనది.

కాని రెండు సంఖ్యల కంటె ఎక్కువ సంఖ్యలను కలపవలసి వచ్చినప్పుడు పిల్లలకు కొంచెము ఇబ్బంది కలుగుతుంది. దీని కోసం "బింద్వంకనం" (బిందు+అంకనం) అనే విధానాన్ని వాడతారు. దీనిని చుక్కల పద్ధతి (Dot Method) అనవచ్చు.

ఉదాహరణ 1 : 879 + 466 + 587 = ?

Step 1 :

```
  879
  466
  587
 -----
 -----
```

పైన వేసిన సంఖ్యలలో, ఒకట్ల స్థానంలో, క్రిందనుండి చూస్తే 7,6,9 అంకెలు ఉన్నాయి. ఆ వరుసలో కలపడం ప్రారంభిస్తే, మొదటగా 7కు 6ను కలపాలి. అపుడు 7+6=13 వస్తుంది.

నిజానికి 10+3గా భావించవచ్చు. ఇందులో 10ని సూచించడానికి 6పైన చుక్కను పెట్టుకుంటారు. అక్కడితో తాత్కాలికంగా 10ని మరిచిపోవచ్చును. మిగిలిన 3ను ముందుకు తీసుకొని వెళ్ళి తర్వాతి 9కి కలపాలి. అపుడు 3+9=12 వస్తుంది.

ఇది 10+2 గా భావించవచ్చు.

ఈ 10ని సూచించడానికి 9 మీద ఒక చుక్కను పెట్టుకుంటారు మిగిలిన 2ను సమాధానంగా ఒకట్ల స్థానంలో వ్రాసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 87\dot{9} \\ 46\dot{6} \\ 587 \\ \hline --2 \\ \hline \end{array}$$

Step 2 :ఇపుడు పదుల స్థానంలో ఉన్న 8,6,7లను కూడాలి. వాటిని కలిపే ముందు, ఒకట్ల స్థానంలో పెట్టిన మొత్తం చుక్కలను లెక్కించాలి. ఇచ్చిన లెక్కలో, 6,9 పైన మాత్రమే చుక్కలు పెట్టబడ్డాయి కనుక మొత్తం 2 చుక్కలు ఉన్నట్లు లెక్క. దీనిని ముందుగా 8కి కలపాలి.

2+8=10 వస్తుంది. ఈ పదిని సూచించడానికి 8 మీద చుక్కను గుర్తించాలి.

మిగిలిన '0'తో కూడికలో ముందుగా వెళ్ళాలి.

0+6=6

ఇది 10 కంటే లోపే ఉంది కనుక, 6 పైన చుక్క అవసరం లేదు. ఈ 6తో ముందుకు వెళ్ళాలి.

6+7=13

ఈ పదిని సూచించడానికి 7 పైన చుక్కను పెట్టుకోవాలి. ఇంక 3 మిగులుతుంది.

ఈ మూడును సమాధానంలో, పదుల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$
\begin{array}{r}
8\dot{7}\dot{9} \\
46\dot{6} \\
5\dot{8}7 \\
\hline
-32 \\
\hline
\end{array}
$$

Step 3 : పై విధంగానే, వందల స్థానంలో ఉన్న 5,4,8లను కలిపే ముందు, పదుల స్థానంలో వచ్చిన చుక్కల సంఖ్య (=2)ను కూడా తీసుకోవాలి.

2+5=7; 5 పై చుక్క ఉండదు

7+4=11; 4 పై చుక్క ఉంచాలి.

1+8=9; 8 పై చుక్క ఉండదు.

సమాధానంలో, వందల స్థానంలో 9ని వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$
\begin{array}{r}
8\dot{7}\dot{9} \\
\dot{4}6\dot{6} \\
5\dot{8}7 \\
\hline
932 \\
\hline
\end{array}
$$

Step 4 : వేల స్థానంలో అంకెలు లేవు. కాని వందల స్థానంలో ఒక చుక్క ఉంది. అందుకే '1'ని సమాధానంలో వేల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$
\begin{array}{r}
8\dot{7}\dot{9} \\
\dot{4}6\dot{6} \\
5\dot{8}7 \\
\hline
1932 \\
\hline
\end{array}
$$

ఈ విధంగా చాలా సంఖ్యలను కూడే సమయంలో, 10 గాని 10 కంటె పెద్ద సంఖ్యలు గాని ఏర్పడినపుడు, ఆ పెద్ద సంఖ్యలను కూడా పూర్తిగా ప్రతీ అంకె దగ్గరా జ్ఞాపకం ఉంచుకొనవలసిన అవసరం లేకుండా, బిందువ్యంకన పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలు :-

$$
\begin{array}{r}
3\dot{7}5 \\
\dot{9}6\dot{4} \\
128 \\
\hline
1467 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\dot{5}06\dot{3} \\
\dot{7}9\dot{8}6 \\
8\dot{7}5\dot{9} \\
\dot{9}1\dot{8}2 \\
\hline
30990 \\
\hline
\end{array}
$$

కూడికలకు పర్యాయపదాలు

- సంకలనం
- యుతి
- సంకలితం
- యోగం
- మిశ్రణం

3. తీసివేతలు (బింద్వంకన పద్ధతి)

బింద్వంకన పద్ధతి

పెద్ద సంఖ్యల నుండి చిన్న సంఖ్యలను తీసివేయడానికి మనం ప్రస్తుతం వాడుతున్న పద్ధతి సరిపోతుంది. చిన్న అంకె నుండి పెద్ద అంకెను తీయవలసివస్తే, చిన్న అంకెకు ప్రక్కన ఉన్న అంకె దగ్గర నుండి 10 అప్పు తీసుకొని, దానిని చిన్న అంకెకు కలిపి, తీసివేయవలసిన పెద్ద అంకెను తీసివేత చేస్తూ ఉంటాము. ఇది అందరికీ తెలుసున్నదే.

ఉదాహరణ 1 : 300 – 168 = ?

$$\begin{array}{r} 300 \\ (-)\ \underline{168} \\ \underline{} \end{array}$$

Step 1 : మొదట '0' నుండి 8ని తీసివేయాలి. అంటే చిన్న అంకెనుండి పెద్ద అంకెను తీసివేయాలి. ఇక్కడ కూడా బింద్వంకన పద్ధతిని వాడవచ్చు.

(i) ఇటువంటి సందర్భాలలో తీసివేస్తున్న అంకెకు ఎడమ వైపున ఉన్న అంకెపై చుక్కను గుర్తించాలి. '8'కి ప్రక్కన '6'పైన చుక్కను గుర్తించాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 300 \\ \underline{1\dot{6}8} \\ \underline{} \end{array}$$

(ii) తర్వాత 8కి దశాంశ పద్ధతిలో పూరకాన్ని (Complement)ను కనుక్కోవాలి. (అంటే, 8కి ఏమిటి కలిపితే 10 అవుతుందో, ఆ అంకె అన్నమాట.)

8+2=10   8 కి 2 పూరకము

(iii) ఈ 2 ను 8 పైన ఉన్న అంకెకు కలపాలి. 2+0=2

(iv) దీనిని సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 300 \\ 1\dot{6}8 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Step 2 :

(i) ఇప్పుడు పదుల స్థానంలో 0 నుండి 6 ని తీసివేయాలి. కాని 6కి పైన చుక్క ఉండుటచేత ముందుగా 6కి 1ని కలపాలి.

6+1=7

(ii) ఈ 7ను 0 నుండి తీసివేయాలి.

ఇక్కడ కూడా చిన్న అంకె నుండి పెద్ద అంకెను తీసివేయవలసి వస్తోంది.

(iii) అందుకే, 6కి ప్రక్కన ఉన్న 1 పైన చుక్కను పెట్టుకోవాలి.

(iv) 7కి దశాంశ పద్ధతిలో పూరకం = 3

(7+3=10)

(v) ఈ 3ని 6 కి పైన ఉన్న అంకెకు కలపాలి.

3+0 = 3

(vi) దీనిని సమాధానంలో పదుల స్థానంలో వ్రాసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 300 \\ \dot{1}\dot{6}8 \\ \hline 32 \\ \hline \end{array}$$

Step 3 :

(i) వందల స్థానంలోని 3 నుండి '1'ని తీసివేయాలి. 1కి పైన చుక్క ఉండుటచేత, ముందుగా 1కి 1 కలపాలి.

1+1=2

(ii) ఈ 2ను 3 నుండి తీయాల్సి ఉంది.

(iii) పెద్ద అంకె నుండి చిన్న అంకెను తీసివేయుట కనుక ఏమీ సమస్య లేదు. 3-2=1 దీనిని సమాధానంలో వందల స్థానంలో వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

```
  300
  ••
  168
  132
 -----
 -----
```

మొదట్లో చుక్కలను వాడినా, బాగా అభ్యాసం చేస్తే, ఆ చుక్కలను వాడనక్కర్లేకుండానే సమాధానాలను సాధించవచ్చు.

తీసివేతలు-రెండవ పద్ధతి : ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలను వందలు, పదులు, ఒకట్లుగా విడదీసి చేయుట.

ఉదాహరణ 1 : 878-357=?

878 = 800 + 70 + 8

357 = 300 + 50 + 7

ఫలితం = 500 + 20 + 1 = 521

తీసివేతలు-మూడవ పద్ధతి : ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్యను వందలు, పదులు, ఒకట్లుగా విడదీసి చేయుట.

ఉదాహరణ 1 : 878-357=?

878-357= 878 - (300)-(50)-(7)

578 -(50)-(7)

528 -(7)

ఫలితం = 521

తీసివేతలకు పర్యాయపదాలు

- వ్యవకలనం
- వ్యవకలితం
- శోధనం
- పతనం
- వియుతి
- అంతరం
- భేదం

4. గుణకారములు–1 (ఏకాధికేన పూర్వేణ)

సూత్రం :– ఏకాధికేన పూర్వేణ

అర్థం :– ముందు ఉన్నదానికంటె ఒకటి ఎక్కువ అయిన దానితో

వివరణ : రెండు సంఖ్యలను గుణించడానికి చాలా పద్ధతులు ఉన్నాయి.

రెండంకెల సంఖ్యల గుణకారములు: ఇచ్చిన రెండంకెల సంఖ్యకు వర్గములు.

ఇచ్చిన సంఖ్యల్లో ఒకట్ల స్థానంలో 5 ఉన్న సంఖ్యలను గుణించే పద్ధతి :

ఉదాహరణ 1 : 35 ని 35 తో గుణించాలి.

$$35 \times 35 = ?$$

పాఠశాలల్లో నేర్పే పద్ధతిలో మూడు అంచెలలో సమాధానం వస్తుంది.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \\ \hline \end{array}$$

1. పైన పేర్కొన్న సూత్రం ప్రకారం ఖాళీలను పూరించే (Fill up the Blanks) పద్ధతిలో సమాధానం వ్రాసుకోవచ్చు.

2. ఈ సమస్యకు సమాధానంలో నాల్గు ఖాళీలు వేసుకోవాలి. (ప్రాతిపదికలోని అంకెలను బట్టి సమాధానంలో ఉండవలసిన ఖాళీలను నిర్ణయించుకోవాలి).

$$\begin{array}{r} 35 \times \\ 35 \\ \hline ---- \\ \hline \end{array}$$

3. మొదట ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను గుణించాలి.

$5 \times 5 = 25$

4. ఈ 25ను సమాధానంలోని కుడి చివర ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline 25 \\ \text{- - - -} \\ \hline \end{array}$$

5. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోని ఒక 35ని తీసుకోవాలి. అందులో ఉన్న 5 కి 'పూర్వం' ఉన్న అంకెను, అంటే 3 ని తీసుకోవాలి.

6. దానికి ఒకటి కలపాలి (ఏకాధికం). $3+1=4$

7. రెండవ సంఖ్య 35లోని 3 ని ఈ 4 తో గుణించాలి. $3 \times 4 = 12$

8. ఈ 12 ని సమాధానంలోని ఎడమవైపు ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline 1225 \\ \text{- - - -} \\ \hline \end{array}$$

ఉదాహరణ 2 : $45 \times 45 = ?$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 45 \\ \hline \text{- - - -} \\ \hline \end{array}$$

1. మొదటి భాగం = $5 \times 5 = 25$

2. ఏకాధికం=$4+1=5$

3. రెండవ భాగం = $4 \times 5 = 20$

4. సమాధానం=$20 | 25 = 2025$

ఉదాహరణ 3 : 75 ×

75

56|25

సమాధానం= 5625

ఉదాహరణ 3 : 95 ×

95

90|25

సమాధానం= 90|25

మూడంకెల సంఖ్యల గుణకారం

ఉదాహరణ 4 : 115 × 115 = ?

115 ×

115

----

1. మొదటి భాగం = 5×5=25
2. ఏకాధికం = 11+1=12
3. రెండవ భాగం = 11×12=132
4. సమాధానం :- 115×115 = 132|25 = 13225

5. గుణకారములు-2 (అంత్యయోర్ధశకేౖపి)

సూత్రం :- అంత్యయోర్ధశకేౖపి

అర్థం :- ఆఖరి అంకెల మొత్తం పది అయినపుడు

వివరణ :- ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలను కూడితే పది వచ్చి, ముందు అంకెలు రెండు సంఖ్యలలోను సమానంగా ఉన్నప్పుడు ఈ సూత్రాన్ని వాడవలెను.

రెండంకెల సంఖ్యల గుణకారం

ఇచ్చిన సంఖ్యలలో '5' చివరన లేనప్పుడు ఈ సూత్రం పనిచేసే పద్ధతి :

ఉదాహరణ 1 : 43×47=?

43 ×
47

----

1. పైన ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను చివరన (ఒకట్ల స్థానంలో) ఉన్న అంకెలను కలుపగా 10 వస్తోంది. 3+7 = 10

2. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెలు సమానంగా ఉన్నాయి. (4)

3. మొదటి భాగం = 3×7=21

4. ఏకాధికం = 4+1=5

5. రెండవ భాగం = 4×5=20

6. సమాధానం = 43×47=2021.

ఉదాహరణ 2 : 74×76 = ?

74
76

----

1. పైన ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను చివరన (ఒకట్ల స్థానంలో) ఉన్న అంకెలను కలుపగా 10 వస్తోంది. 4+6 = 10

2. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెలు సమానంగా ఉన్నాయి. (7)

3. మొదటి భాగం = 4×6=24

4. ఏకాధికం = 7+1=8

5. రెండవ భాగం = 7×8=56

6. సమాధానం = 74×76 = 5624.

ఉదాహరణ 3 : 62×68 = ?

62

68

----

1. పైన ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను చివరన (ఒకట్ల స్థానంలో) ఉన్న అంకెలను కలుపగా 10 వస్తోంది. 2+8 = 10

2. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెలు సమానంగా ఉన్నాయి. (6)

3. మొదటి భాగం = 2×8=16

4. ఏకాధికం = 6+1=7

5. రెండవ భాగం = 7×6=42

6. సమాధానం = 62×68 = 4216.

6. సంఖ్యాపూరకములు (నిఖిలం నవతః చరమం దశతః)

సూత్రం :– నిఖిలం నవతః చరమం దశతః

అర్థం :– అన్నీ తొమ్మిది నుండి, ఆఖరిది మాత్రం పదినుండి"

వివరణ :– ఆఖరి అంకెకు 10 ద్వారాను, మిగిలిన అంకెలకు 9 ద్వారాను పూరకాలను సంపాదించాలి. ఈ సూత్రాన్ని వినియోగించే ముందు కొన్ని ప్రాధమిక విషయాలను పారిభాషిక పదాలను గమనిద్దాం!

1. కిరాణా షాపులో సరుకులకు రు. 68/–లు అయిందనుకొందాం వందరూపాయల నోటు ఇస్తే, మనకెంత రావాలి? 32 రూపాయలని ఠక్కున సమాధానం చెబుతాం.

2. 'నిఖిలం' కనుక్కోవటానికి మనం 100లో నుండి 68ని తీసివేశాం. కాని, అది ఒక్కటే పద్ధతి కాదు. సులభ పద్ధతులు ఇంకా ఉన్నాయి.

3. ఉదాహరణకు, 68కి నిఖిలం కనుక్కోవడానికి :–

i) ఇచ్చిన 68లో ఆఖరి అంకెను తీసుకోవాలి. అది 8.

ii) ఇది 10 కంటె ఎంత తక్కువ? (పూరకం ఎంత?) సమాధానం : 2

iii) ఇచ్చిన 68లో 8 కంటె ముందు అంకె 6

iv) ఇది 9 కంటె ఎంత తక్కువ? (పూరకం ఎంత?) సమాధానం : 3

v) ఈ వచ్చిన పూరకాలనన్నింటినీ ఒక వరుసలో వేస్తే వచ్చేదే నిఖిలం.

vi) ఈ విధంగా 68కి నిఖిలం 32 వస్తుంది.

ఉదాహరణలు :

43 కి నిఖిలం : 57

286కి నిఖిలం : 714

80497 కి నిఖిలం : 19503

7. గుణకారములు-3 (ఏకన్యూనేన పూర్వేణ)

సూత్రం :- ఏకన్యూనేన పూర్వేణ

అర్థం : 'ముందు ఉన్న దానికంటె ఒకటి తక్కువ అయిన దానితో'

ఉదాహరణ 1 : 68 × 99 = ?

పద్ధతి 1 :

1. ఈ సమస్యకు సమాధానంలో నాల్గు ఖాళీలు వేసుకోవాలి.

స్టెప్-1

i) ఇక్కడ 99కి పూర్వం ఉన్న సంఖ్య 68

ii) దీనికి (అంటే 68కి) నిఖిలం = 32

iii) ఈ నిఖిలమును సమాధానంలో కుడి చివరన ఉన్న రెండు ఖాళీలలో వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

```
  68 ×
  99
------
 --32
------
```

స్టెప్-2

i) 99కి పూర్వం ఉన్న సంఖ్య = 68

ii) దీనికంటె (అంటే, 68 కంటె) ఒకటి తక్కువ = 68 - 1 = 67

iii) దీనిని సమాధానంలో ఎడమ చివరన ఉన్న రెండు ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

```
   68 ×
   99
--------
 6 7|3 2
--------
```

∴ 68×99 = 6732

పద్ధతి 2 :

$99 \times 68 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య (99) లో అన్నీ 9లు ఉన్నాయి.

2. రెండవ సంఖ్య ఎట్టైనా ఉండవచ్చు.

3. రెండు సంఖ్యలను పైన చూపిన విధంగా వేసుకోవాలి.

4. సమాధానంలో నాలుగు ఖాళీలు వేసుకోవాలి.

5. రెండవ సంఖ్యను 1 తగ్గించి 99 కింద వేసుకోవాలి. (సమాధానంలో ఎడమవైపు రెండు ఖాళీలలో వేసుకోవాలి)

99×68 =

67
----

6. పైన పదుల స్థానంలో ఉన్న 9 నుండి క్రింద ఉన్న 6ను తీసివేయాలి. 9–6=3

7. ఈ 3ను పదుల స్థానంలో ఉన్న ఖాళీలో వెయ్యాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

99 × 68

673
----

8. పైన ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 9 నుండి క్రింద ఉన్న 7ను తీసివేయాలి. 9–7=2

7. ఈ 2ను ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న ఖాళీలో వెయ్యాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

99 × 68

6732

సమాధానం = 99×68 = 6732

ఉదాహరణ 2 : 53 × 99 = ? (పద్ధతి1)

స్టెప్ -1

I) 99 కి పూర్వం సంఖ్య = 53

II) 53 కి నిఖిలం = 47

III) దీనిని కుడి చివర రెండు ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

```
   53
   99
 ------
   47
  ----
 ------
```

స్టెప్-2

i) పూర్వం సంఖ్య = 53

ii) దీనికంటె ఒకటి తక్కువ = 53-1=52

iii) దీని ఎడమ చివర రెండు ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

```
   53×
   99
 ------
  52|47
 ------
```

∴ 53×99=5247

విశేష వివరణ : ఈ పైన ఇచ్చిన ఉదాహరణలలో, గుణిస్తున్న సంఖ్య 99లో రెండు 9లు ఉన్నాయి.

అందుచే గుణించుచున్నప్పుడు రెండేసి, రెండేసి ఖాళీలను మొత్తం నాల్గు ఖాళీలను నింపడానికి వీలవుతుంది.

999 తో గుణిస్తే, మూడేసి, మూడేసి ఖాళీలను (మొత్తం ఆరు ఖాళీలను) నింపవలసి ఉంటుంది. అంటే, గుణిస్తున్న అన్నీ '9' లు ఉన్న సంఖ్యలలో ఎన్ని 9లు ఉంటాయో, అన్నేసి ఖాళీలను నింపాల్సి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 3: 123 × 999 = ? (పద్ధతి1)

స్టెప్ - 1

i) 999 కి పూర్వం సంఖ్య = 123

ii) 123 కి నిఖిలం = 877

iii) దీనిని కుడి చివర ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

```
   123
   999
 -------
   877
 ------
```

స్టెప్ - 2

i) పూర్వ సంఖ్య = 123

ii) దీని కంటే ఒకటి తక్కువ = 123-1=122

iii) దీనిని ఎడమ చివర ఖాళీల్లో వేయాలి.

```
    123
    999
 ---------
  122|877
 ---------
```

∴ 123×999=122877

ఉదాహరణ 4 : 15064 × 99999=?

స్టెప్-1

i) 99999కి పూర్వ సంఖ్య = 15064

ii) దీనికి నిఖిలం = 84936

iii) దీనిని కుడిచివర్లో వేయాలి = 84936

```
 -----|84936
```

స్టెప్ : 2

i) పూర్వ సంఖ్య =15064

ii) దీని కంటె ఒకటి తక్కువ 15064-1=15063

iii) దీనిని ఎడమ చివర్లో వేయాలి

15063 | 84936

$\therefore$ 15064 × 99999 = 1506384936

రెండవ పద్ధతి :

99999×15064 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య (99999) లో అన్నీ 9లు ఉన్నాయి.

2. రెండవ సంఖ్య ఎట్లైనా ఉండవచ్చు.

3. రెండు సంఖ్యలను పైన చూపిన విధంగా వేసుకోవాలి.

4. సమాధానంలో పది ఖాళీలు వేసుకోవాలి.

5. రెండవ సంఖ్యను 1 తగ్గించి 99999 కింద వేసుకోవాలి. (సమాధానంలో ఎడమవైపు ఐదు ఖాళీలలో వేసుకోవాలి)

99999×15064 =

15063

6. పైన ఉన్న 99999లోని ఒక్కొక్క 9 నుండి క్రింద ఉన్న 15063లోని ఒక్కొక్క అంకెను తీసివేయాలి.

9–1=8

9–5=4

9–0=9

9–6=3

9–3=6

ఈ అంకెలను మిగిలిన ఖాళీలలో ఎడమ నుండి కుడి వైపుకు వేయవలెను.

సమాధానం = 99999×15064 = 1506384936

8. గుణకారములు-4 (నిఖిలం)

సూత్రం :-"నిఖిలం"

వివరణ : కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో ఈ "నిఖిలం" సూత్రాన్ని గుణకారానికి ఉపయోగించవచ్చు. ముఖ్యంగా, ఆ సంఖ్యలు పది, వంద, వేయి మొదలయిన సంఖ్యలకు దగ్గరగా ఉంటే, ఒక్క వాక్యంలో సమాధానం రాబట్టవచ్చు.

పదికి దగ్గర్లో ఉన్న సంఖ్యలతో (ప్రాతిపదిక (బేస్) = 10)

ఉదాహరణ 1: 9 × 8 = ?

స్టెప్ - 1

i) 9కి నిఖిలం = 1

ii) 8కి నిఖిలం = 2

iii) ఈ 1ని, 2ని మైనస్ గుర్తుతో సహా, ఈ క్రింద చూపిన విధంగా వేయాలి.

$$\begin{array}{cc} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline _ & _ \\ \hline \end{array}$$

స్టెప్ - 2

i) దీని సమాధానానికి రెండు భాగాల్లో ఒక్కొక్క ఖాళీ వేసుకోవాలి.

ii) కుడి వైపున నిఖిలములను, సంజ్ఞతో సహా గుణించాలి.

iii) (−1) × (−2) = 2

ఈ 2ను సమాధానంలోని కుడి వైపు ఖాళీలో వేసుకోవాలి.

$$\begin{array}{cc} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline _ & 2 \\ \hline \end{array}$$

iv) ఇచ్చిన సంఖ్యలకు నిఖిలములను ఏటవాలుగా కలపాలి.

9 + (−2) = 7 లేదా

8 + (−1) = 7

v) దీనిని సమాధానంలో ఎడమవైపు ఖాళీలో వేయాలి.

9 – 1
8 – 2
7 2

$\therefore 9 \times 8 = 72$

ఉదాహరణ 2 :

$8 \times 7 = ?$
8 – 2
7 – 3
5 6

$\therefore 8 \times 7 = 56$

విశేష గమనిక : పైన తీసుకొనిన ఉదాహరణలలో నిఖిలాలను గుణించగా వచ్చిన సంఖ్య 10 కంటే తక్కువగా ఉండుటచే, తీసుకొనిన ఖాళీలు సరిగ్గా నిండినవి.

నిఖిలములు గుణించగా వచ్చిన సంఖ్య ప్రాతిపదిక కంటె ఎక్కువగా ఉన్నపుడు

ఉదాహరణ 3:

$7 \times 6 = ?$
7 – 3
6 – 4
– –

పైన సూచించిన ఉదాహరణలో నిఖిలములు 3ను, 4ను, ఈ రెండింటినీ గుణిస్తే 12 వస్తుంది. తీసుకొనిన లెక్కలోని సంఖ్యల ప్రాతిపదిక 10. సమాధానంలో రెండు భాగాల్లోను ఒక్కొక్క ఖాళీ మాత్రమే తీసుకోగలిగాము. అందుచే ఈ 12ని $_{1}2$గా వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి :–

7 – 3
6 – 4
– $_{1}2$

స్టెప్ : 2

i) ఇచ్చిన సంఖ్యలకు నిఖిలాలను ఏటవాలుగా కలిపితే వచ్చిన విలువ = 7+(−4)=3 లేదా 6+(−3)=3

ii) **ఇప్పటి స్థితి**

$$\begin{array}{cc} 7 & -3 \\ 6 & -4 \\ \hline \underline{3} & {}_{1}\underline{2} \\ \hline \end{array}$$

iii) ఎడమవైపు ఉన్న 3కు కుడివైపున దిగువగా వేసిన 1ని కలపాలి 3+1=4

ఇప్పటి స్థితి

$$\begin{array}{cc} 7 & -3 \\ 6 & -4 \\ \hline \underline{3} & {}_{1}2 \\ \hline \underline{4} & \underline{2} \\ \hline \end{array}$$

$\therefore 7 \times 6 = 42$

ప్రాతిపదిక 100 ఉన్న సంఖ్యలతో గుణకారము (100కి దగ్గరగా ఉన్న సంఖ్యల గుణకారము)

ఉదాహరణ 4 : 96 × 96 = ?

స్టెప్ − 1

i) ఇచ్చిన సంఖ్యలు 100 ప్రాతిపదికగా గలవి కావున సమాధానంలో రెండు భాగాలకు రెండేసి ఖాళీలను వేసుకోవాలి.

ii) ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య 96కు నిఖిలం = 04

iii) ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య 96కు నిఖిలం = 04

(04) × (04) = 16

iv) దీనిని సమాధానంలో కుడివైపు ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

v) **ఇప్పటి స్థితి**

$$\begin{array}{r} 96 - 04 \\ 96 - 04 \\ \hline \underline{\quad} \;\; \underline{16} \\ \hline \end{array}$$

స్టెప్-2

i) ఏటవాలుగా ఉన్న అంకెలను కలపాలి

ii) 96 + (-04) = 92

iii) దీనిని సమాధానంలో ఎడమవైపున వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 96 - 04 \\ 96 - 04 \\ \hline \underline{92} \;\; \underline{16} \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 96×96=9216

ఉదాహరణ 5 : 89 × 89 = ?

$$\begin{array}{r|l} 89 & -11 \\ 89 & -11 \\ \hline \underline{\quad} & {}_1\underline{21} \\ \hline \underline{78} & {}_1\underline{21} \\ \hline 79 & 21 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 89 × 89 = 7921

ఈ సూత్రానికి ఇంతవరకూ తీసుకొన్న ఉదాహరణలలో, అన్ని సంఖ్యలు, దగ్గర్లో ఉన్న ప్రాతిపదిక (Base) కంటె తక్కువగా ఉన్నాయి.

ఇచ్చిన సంఖ్యలు ప్రాతిపదిక కంటే ఎక్కువగా ఉన్నపుడు గుణకారము

ఉదాహరణ 6 : 106 × 106 = ?

వివరణ :-

1. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలు 100కి దగ్గర్లో ఉన్నాయి. అందుచేత 100ని ప్రాతిపదికగా తీసుకుందాం.

2. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య 106. ఇది ప్రాతిపదిక కంటే 6 ఎక్కువ. అదే విధంగా రెండవ సంఖ్య కూడా ప్రాతిపదిక కంటె 6 ఎక్కువ. ఈ రెండింటిని గుణించాలి. దీనిని సమాధానంలో కుడి చివరన ఉన్న ఖాళీల్లో వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

```
 106 + 06
 106 + 06
---------
 ___   36
```

3. ఏటవాలుగా ఉన్న అంకెలను కలపాలి. 106+06=112

దీనిని సమాధానంలో ఎడమవైపున వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

```
 106 + 6
 106 + 6
---------
 112   36
```

ఒక సంఖ్య ప్రాతిపదిక కంటె తక్కువ, రెండవ సంఖ్య ప్రాతిపదిక కంటె ఎక్కువ ఉన్నపుడు గుణకారం

ఉదాహరణ 7 :- 107×94=?

1. ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలు 100కి దగ్గర్లో ఉన్నాయి. అందుచేత 100ని ప్రాతిపదికగా తీసుకొందాం.

2. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య 107. ఇది ప్రాతిపదిక కంటే 7 ఎక్కువ. రెండవ సంఖ్య 94. ఇది ప్రాతిపదిక కంటె 6 తక్కువ. వాటిని ఈ విధంగా వ్రాసుకోవాలి.

$$
\begin{array}{r r}
107 & +07 \\
94 & -06 \\
\hline
--- & -- \\
\hline
\end{array}
$$

3. (+07)ను (−06)తో గుణిస్తే −42 వస్తుంది. దానిని $\overline{42}$గా వ్రాసుకోవాలి.

4. ఏటవాలుగా సంఖ్యలను కూడాలి.

107+(−06)=101

లేదా

94 + (+07)=101

ఇప్పటి స్థితి :-

$$
\begin{array}{r r}
107 & +07 \\
94 & -06 \\
\hline
101 & \overline{42} \\
\hline
\end{array}
$$

5. కుడివైపున ఉన్న ఋణసంజ్ఞతో ఉన్న 42 ($\overline{42}$)ని సర్దుబాటు చేయడానికి ఎడమవైపున ఉన్న నూటొక్క వందలలో ఒక వందను వినిమయం చేయాలి. అంటే ఒక 100 అప్పు తీసుకొని, ఆ 100లో నుండి తీసివేయాలి. అంటే 42కి నిఖిలాన్ని కనుక్కోవాలి.

100 − 42 =58

6.

$$
\begin{array}{r r}
107 & +07 \\
94 & -06 \\
\hline
100 & 58 \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore 107\times94=10058$

ఋణసంజ్ఞతో బాటు పెద్ద లబ్ధములు వచ్చినపుడు గుణకారములు

ఉదాహరణ 8 : 112 × 88 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలు 100కి దగ్గర్లో ఉన్నాయి. అందుచేత 100ని ప్రాతిపదికగా తీసుకొందాం.

2. ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఈ విధంగా వేసుకోవాలి.

$$\begin{array}{r} 112 + 12 \\ 88 - 12 \\ \hline 100 - 144 \\ \hline 100 \quad {}_{\bar{1}}\overline{4}\overline{4} \\ \hline \end{array}$$

3\. $100 + \bar{1} = 99$

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r} 112 + 12 \\ 88 - 12 \\ \hline 99 \quad \overline{4}\overline{4} \\ \hline 98 \quad 56 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore 112 \times 88 = 9856$

ఉదాహరణ 9 : $1005 \times 987 = ?$

1\. ఇచ్చిన సంఖ్యలు 1000కి దగ్గర్లో ఉన్నాయి. అందుచేత 1000ని ప్రాతిపదికగా తీసుకొందాం.

2\. ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఈ విధంగా వేసుకోవాలి.

$$\begin{array}{r} 1005 + 005 \\ 987 - 013 \\ \hline 992 - 065 \\ \hline 992 \quad \overline{0}\overline{6}\overline{5} \\ \hline 991 \quad 935 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore 1005 \times 987 = 991935$

9. గుణకారములు-5 (ఆనురూప్యేణ)

సూత్రం :- "ఆనురూప్యేణ"

అర్థం :- "తగినట్లుగా"

వివరణ : ఇంతవరకూ తీసుకొన్న గుణకారాల ఉదాహరణలలో, ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను కనీసం ఒక సంఖ్య ప్రాతిపదికకు దగ్గరగా ఉండటాన్ని గమనించవచ్చు. దీనితో గుణకారాన్ని చాలా సులభంగా సాధించగలిగాం.

కాని ప్రాతిపదికకు దూరంగా ఉన్న రెండు సంఖ్యలను గుణించవలసి వస్తే, ఎట్లా ముందుకు సాగాలి ? దీనిని పరిశీలిద్దాం!

గుణకారంలో పాల్గొంటున్న రెండు సంఖ్యలు పది, వంద, వేయి, పదివేలు వంటి సంఖ్యలకు దగ్గరగా లేకుంటే, రెండురకాల ప్రాతిపదికలను నిర్ణయించుకొని గుణకారాలను సులభంగా సాధించవచ్చును. ఒక ప్రాతిపదికను సిద్ధాంత ప్రాతిపదిక (Theoretical Base లేదాTB), రెండవ ప్రాతిపదికను వాస్తవ ప్రాతిపదిక (Working Base లేదాWB) అనీ అంటారు.

ఈ WB, TB లకు మధ్య సంబంధము సమాధానాన్ని రాబట్టడంలో ఉపకరిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 : 41×41=?

ఇచ్చిన సంఖ్యలు వాటి ప్రాతిపదిక అయిన 100కి చాలా దూరంలో ఉన్నాయి. ఈ 100ని TB గా తీసుకొంటారు. ఇచ్చిన సంఖ్యలకు దగ్గరగా ఉండే సౌకర్యం గల ఒక సంఖ్య 50 కావచ్చు, 40 కావచ్చు, 10 కావచ్చు, లేక వేరే ఏదైనా కావచ్చు. దీనిని WB గా తీసుకొంటారు.

పద్ధతి1

1. సిద్ధాంత ప్రాతిపదికను (TB)100గాను, వాస్తవ ప్రాతిపదికను (WB) 50 గాను తీసుకొందాము.

TB=100

WB = 50

2. 50ని సాపేక్షంగా తీసుకొంటే, ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\begin{array}{r}41 - 09\\ 41 - 09\\ \hline 32 \quad 81\\ \hline\end{array}$$

3. 9ని 9తో గుణించగా వచ్చిన 81లో ఏమీ మార్పు అవసరం లేదు. ఇక్కడ TB=100 (ప్రాతిపదిక 100) కనుక కుడివైపున రెండు అంకెల వరకూ ఉండవచ్చు.

4. కాని '32' అనేది 50తో ముడిపడి ఉంది. దానిని దశాంశ విధానానికి సరిచేయుటకు WB /TB తో గుణించాలి.

$$32\times\frac{50}{100} = 32\times\frac{1}{2} = 16$$

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r|l}41 & -9\\ 41 & -9\\ \hline \frac{50}{100}\times 32 & 81\\ \hline 16 & 81\\ \hline\end{array}$$

$\therefore 41\times41 = 1681$

పద్ధతి2

1. సిద్ధాంత ప్రాతిపదిక TBను 10 గాను, వాస్తవ ప్రాతిపదిక WBను 50 గాను తీసుకొందాము.

TB = 10

WB = 50

2. 50ని సాపేక్షంగా తీసుకొనినందున ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయాలి. :-

$$\begin{array}{r|l}41 & -9\\ 41 & -9\\ \hline 32 & 81\\ \hline 32 & {}_{8}1\\ \hline\end{array}$$

3. ఇక్కడ సిద్ధాంత ప్రాతిపదిక 10ని తీసుకున్నాము గనుక సమాధానంలో కుడివైపున ఒక అంకె మాత్రమే ఉండటానికి అవకాశం ఉంది. అంతకంటె పెద్ద అంకెలు వచ్చినపుడు, వాటిని ఎడమవైపున వచ్చే లబ్ధ సంఖ్యకు కలపవలసి ఉంటుంది. అందుకొరకే, 8ని కొంచెము క్రిందకు చూపవలసి వచ్చింది.

4. 32 మాత్రం 50(WB)తో ముడిపడి ఉంది కనుక, దానిని దశాంశ విధానానికి సరిచేయుటకు WB/TB తో గుణించాలి.

$$32\times\frac{50}{10} = 32\times5=160$$

ఇప్పటి స్థితి :

	41	−9
	41	−9
$\frac{50}{10}$	×32	$_{8}1$
	160	$_{8}1$
	168	1

∴ 41×41=1681

పద్ధతి 3

1. సిద్ధాంత ప్రాతిపదిక (TB)ను 10 గాను, వాస్తవ ప్రాతిపదిక (WB)ను 40గాను తీసుకొందాము. TB=10

WB=40

2. 40ని సాపేక్షంగా తీసుకొనినందున ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయాలి.

41	+ 1
41	+ 1
42	1

3. ఈ 42 మాత్రం 40తో ముడిపడి ఉంది. కనుక దానిని దశాంశ విధానానికి సరిచేయుటకుWB /TB తో గుణించాలి.

$$\frac{WB}{TB} = \frac{40}{10} = 10$$

$$42\times \frac{WB}{TB} = 42\times 4 = 168$$

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{r|l} 41 & +1 \\ 41 & +1 \\ \hline \frac{40}{10}\times 42 & 1 \\ \hline 168 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 41×41=1681

ఉదాహరణ 2 : 49×49=2

పద్ధతి 1 :

TB=100; WB=50

$$\begin{array}{r|l} 49 & -01 \\ 49 & -01 \\ \hline \frac{50}{100}\times 48 & 01 \\ \hline 24 & 01 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 49×49=2401

పద్ధతి 2 :

TB=10; WB=50

$$\begin{array}{r|l} 49 & -1 \\ 49 & -1 \\ \hline \frac{50}{100}\times 48 & 1 \\ \hline 240 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ 49×49=2401

ఉదాహరణ 3 : 59×59=?

పద్ధతి 1 :

TB =100; WB=50

59	+09
59	+09
$\frac{50}{100}$×68	81
34	81

∴ 59 × 59 = 3481

పద్ధతి 2 :

TB = 10

WB = 50

59	+9
59	+9
$\frac{50}{10}$×68	$_{8}1$
340	$_{8}1$
348	1

∴ 59×59=3481

పద్ధతి 3:

TB=10

WB=60

59	−1
59	−1
$\frac{60}{10}$×58	1
348	1

∴ 59×59=3481

ఉదాహరణ 4 :

62×48=?

TB=10

WB=50

62	+12
48	- 2
$\frac{50}{10}\times 60$	$\bar{2}\bar{4}$
300	${}_{\bar{2}}\bar{4}$
298	$\bar{4}$
297	6

∴ 62×48=2976

ఉదాహరణ 5 :

249×245=?

TB=1000

WB=250

249	-001
245	-005
$\frac{250}{1000}\times 244$	005
61	005

∴ 249×245 = 61005

ఉదాహరణ 6 :

19 × 499 = ?

TB=100

WB=500

19 − 481

499 − 1

$\frac{500}{100} \times 18$	$_{4}81$
90	$_{4}81$
94	81

∴ 19 × 499 =9481

ఉదాహరణ 7 :

489×495=?

TB=1000

WB=500

489 −011

495 −005

$\frac{500}{1000}$	×484	055
	242	055

∴ 489×495 = 242055

10. గుణకారములు-6

(యావదూనం తావదూనీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్)

సూత్రం : యావదూనం తావదూనీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్

అర్థం : ఎంత తక్కువో, ఇంకా అంత తగ్గించి, వర్గాన్ని జోడించవలెను.

వివరణ : ఈ సూత్రం కొన్ని సంఖ్యలు వర్గాలను గణించడంలో బాగా ఉపయోగిస్తుంది. ప్రాతిపదికలోని సున్నల సంఖ్యను బట్టి సమాధానంలో కుడివైపున ఉండవలసిన ఖాళీలను నిర్ణయించుకోవాలి.

ఒక అంకె ఉన్న సంఖ్యకు వర్గం కనుగొనుట

ఉదాహరణ 1 : :- 9×9=?

1. ఇచ్చిన సంఖ్యకు దగ్గర్లో ఉన్న దశాంశ విధానంలోని 10 యొక్క ఘాతపు విలువను తీసుకోవాలి.

2. ఈ ఉదాహరణలో ఇచ్చిన సంఖ్య 9. అందుచేత 10ని తీసుకోవాలి. అదే మన ప్రాతిపదిక.

3. ఇచ్చిన సంఖ్యకు, ప్రాతిపదికకు మధ్యగల భేదాన్ని గణించాలి.

   భేదం = 10−9=1

4. ఇచ్చిన సంఖ్యను అంటే 9ని, భేదం యొక్క విలువతో తగ్గించాలి. (అంటే, ఇచ్చిన సంఖ్యలో నుండి భేదాన్ని తీసివేయాలి) ఈ ఉదాహరణలో 9 లో నుండి 1 తీసి వేయాలి.

   9−1=8

5. ఈ వచ్చిన సంఖ్యను సమాధానంలో ఎడమవైపు భాగంలో వేసుకోవాలి.

6. భేదం యొక్క వర్గాన్ని కనుగొనాలి. భేదం యొక్క వర్గం = 1×1=1

7. ఈ వర్గాన్ని సమాధానంలో కుడివైపు భాగంలో వేసుకోవాలి.

   $9\times9=\underline{8}|\underline{1}$

∴ 9×9=81

రెండు అంకెలు ఉన్న సంఖ్యకు వర్గము కనుగొనుట

ఉదాహరణ 2: 91×91=?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 91

2. ఈ సంఖ్యకు సమీపంలో ఉన్న దశాంశ ఘాతపు విలువ = 100 (ప్రాతిపదిక = 100)

3. ప్రాతిపదికకు ఇచ్చిన సంఖ్యకు భేదం = 100–91= 09

4. ఇచ్చిన సంఖ్యలో నుండి భేదాన్ని తీసివేయాలి. 91–09=82

5. ఈ వచ్చిన సంఖ్యను సమాధానంలో ఎడమవైపు భాగములో వేసుకోవాలి.

91×91=82 | __

6. భేదం యొక్క వర్గం = 9×9=81

ప్రాతిపదికలో రెండు సున్నాలు ఉన్నాయి కనుక భేదం యొక్క వర్గాన్ని రెండంకెలలో సూచించాలి.

7. దీనిని సమాధానంలో కుడివైపున వేసుకోవాలి.

91×91=82 | 81

∴ 91×91= 8281

మూడు అంకెలు ఉన్న సంఖ్యకు వర్గము కనుగొనుట.

ఉదాహరణ3:

989×989=?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 989

2. ప్రాతిపదిక = 1000

3. భేదం = 11

4. ఇచ్చిన సంఖ్య – భేదం = 989–11=978

5. భేదం యొక్క వర్గం = 11×11=121

6. సమాధానం = 978 121

∴ 989×989=978 121.

ఉదాహరణ 4:- 993 × 993 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 993
2. ప్రాతిపదిక = 1000
3. భేదం = 7
4. ఇచ్చిన సంఖ్య – భేదం = 993–7=986
5. భేదం యొక్క వర్గం = 7×7=49=049

(ప్రాతిపదికలో మూడు సున్నాలు ఉన్నాయి కనుక భేదం యొక్క వర్గాన్ని మూడంకెలలో సూచించాలి.)

6. సమాధానం = 986 049

∴ 993×993 = 986049.

ఉదాహరణ 5 :- 9992 × 9992 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 9992
2. ప్రాతిపదిక = 10000
3. భేదం = 8
4. ఇచ్చిన సంఖ్య – భేదం = 9992–8=9984
5. భేదం యొక్క వర్గం = 8×8=64=0064

(ప్రాతిపదికలో నాలుగు సున్నలు ఉన్నాయి కనుక భేదం యొక్క వర్గాన్ని నాలుగంకెలలో సూచించాలి.)

6. సమాధానం = 99840064

∴ 9992 × 9992 = 99840064

11. గుణకారములు-7

(యావదధికం తావదధికీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్)

సూత్రం: యావదధికం తావదధికీకృత్య వర్గం చ యోజయేత్

అర్థం : ఎంత ఎక్కువో, ఇంకా అంత ఎక్కువ చేసి, వర్గాన్ని జోడించాలి.

వివరణ : ఇచ్చిన సంఖ్యలు ప్రాతిపదిక కంటె ఎక్కువగా ఉన్నపుడు ఈ సూత్రం వర్తిస్తుంది.

ప్రాతిపదికలోని సున్నల సంఖ్యను బట్టి సమాధానంలో కుడివైపున ఉండవలసిన ఖాళీలను నిర్ణయించుకోవాలి.

ఉదాహరణ 1: 11 × 11 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 11
2. ఈ సంఖ్యకు సమీపంలో ఉన్న దశాంశ ఘాతపు విలువ = 10
   (ప్రాతిపదిక = 10)
3. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ప్రాతిపదికకు గల భేదం = 11−10=1
4. ఇచ్చిన సంఖ్య, ప్రాతిపదిక కంటే ఎంత ఎక్కువగా ఉంటే, ఇంకో అంత పెద్దదిగా చేయాలి. అనగా, ఇచ్చిన సంఖ్యకు భేదాన్ని కలపాలి.
   ఇచ్చిన సంఖ్య+భేదం=11+1=12
5. దీనిని సమాధానంలో ఎడమవైపున ఖాళీలలో వేసుకోవాలి.
   11×11=12
6. భేదం యొక్క వర్గం = 1×1=1. (ప్రాతిపదికలో ఒక సున్న ఉంది. భేదం యొక్క వర్గం కూడ ఒక్క అంకెలో ఉండాలి.)
7. దీనిని సమాధానంలో కుడివైపున వేసుకోవాలి.
   11×11=12 1
8. సమాధానం=121.

ఉదాహరణ 2: 17×17=?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 17
2. ప్రాతిపదిక = 10
3. భేదం = 17−10=7

4. ఇచ్చిన సంఖ్య+భేదం=17+7=24

5. భేదం యొక్క వర్గం=7×7=49

6. ఇప్పటి స్థితి = $24 \mid 49 = 24 \mid_{4} 9 = 289$

ఉదాహరణ 3 : 106 × 106 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 106

2. ప్రాతిపదిక = 100

3. భేదం = 106–100=6

4. ఇచ్చిన సంఖ్య+భేదం=106+6=112

5. భేదం యొక్క వర్గం=6×6=36

6. సమాధానం = 11236

ఉదాహరణ 4 : 1012 × 1012 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 1012

2. ప్రాతిపదిక = 1000

3. భేదం = 1012–1000=12

4. ఇచ్చిన సంఖ్య+భేదం=1012+12=1024

5. భేదం యొక్క వర్గం=12×12=144

6. సమాధానం = 1024144

12. గుణకారములు-8 (ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్)

సూత్రం : ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్

అర్థం : నిలువుగాను, అడ్డంగాను

వివరణ : ఇంతవరకు వివరించిన సూత్రాలకు ఇచ్చిన ఉదాహరణలలోని సంఖ్యలు ఒక నిర్ణీత పద్ధతిలో ఉన్నాయి. చూసిన వెంటనే ఏ నిర్ణీత పద్ధతి కూడా స్ఫురించనపుడు ఈ సూత్రం బాగా ఉపయోగిస్తుంది.

గమనిక : ఇక్కడ 'అడ్డం' (తిర్యక్) అనే పదం 'ఏటవాలు' అనే అర్థంలో వాడబడింది.

ఉదాహరణ 1 : 12 × 34 = ?

```
  12
 ×34
 ----
 ---
 ----
```

1. ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క లబ్ధాన్ని మూడు అంచెలలో సాధించవచ్చు.

i) ఒకట్ల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతో

ii) ఒకట్ల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతోను, పదుల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతోను,

iii) పదుల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతో

2. **ఒకట్ల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతో**

మొదటి సంఖ్య 12లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 2ను, ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య 34లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 4తో గుణించాలి. (అంటే నిలువు గుణకారము)

```
↑ 2
  4
 ---
  8
 ---
```

3. **ఒకట్ల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతోను, పదుల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతోను** ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని అంకెలను ఈ క్రింద చూపిన విధంగా ఏటవాలుగా గుణించి కూడాలి.

```
 1   2
   ×
 3   4
-----------------
```

$1 \times 4 + 2 \times 3 = 4 + 6 = 10 = {}_{1}0$

4. **పదుల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతో**

ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని పదుల స్థానాల్లోని అంకెలను ఈ క్రింద చూపిన విధంగా నిలువుగా గుణించాలి.

$$\begin{array}{r} \uparrow 1 \\ 3 \\ \hline 1\times 3 = 3 \\ \hline \end{array}$$

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ \times & 3 & 4 \\ \hline 3 & 0_{1} & 8 \\ \hline 4 & 0 & 8 \\ \hline \end{array}$$

6. సమాధానం = 12 × 34 = 408

ఉదాహరణ 2 :

$$\begin{array}{r} 2\ 4 \\ \times 5\ 4 \\ \hline --- \\ \hline \end{array}$$

1. **ఒకట్ల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతో**

ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య 24లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 4ను, ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య 54లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 4తో గుణించాలి. (అంటే నిలువు గుణకారము)

$$\begin{array}{r} \uparrow 4 \\ 4 \\ \hline 16 \\ \hline \end{array}$$

16ని ఈ విధంగా వేసుకోవాలి $_{1}6$

2. **ఒకట్ల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతోను, పదుల స్థానాన్ని ఒకట్ల స్థానంతోను**

ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని అంకెలను ఏటవాలుగా గుణించి కూడాలి.

$$\begin{matrix} 2 & \times & 4 \\ 5 & & 4 \end{matrix}$$

$2\times4+5\times4=8+20=28={}_{2}8$

3. పదుల స్థానాన్ని పదుల స్థానంతో

ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని పదుల స్థానాల్లోని అంకెలను ఈ క్రింద చూపిన విధంగా నిలువుగా గుణించాలి.

$$\begin{array}{r} \uparrow 2 \\ 5 \\ \hline 2\times5=\ 10 \\ \hline \end{array}$$

ఇప్పటి స్థితి :

$$\begin{array}{c|c|c} & 2 & 4 \\ & 5 & 4 \\ \hline 10 & {}_{2}8 & {}_{1}6 \\ \hline \end{array}$$

6. పదుల స్థానంలో 8తో 1 కూడాలి అంటే

$8+1=9$

7. వందల స్థానంలో 10తో 2 కూడాలి. అంటే

$10+2=12$

ఈ క్రింది విధంగా వేయాలి.

$$\begin{array}{r|c|c} & 2 & 4 \\ \times & 5 & 4 \\ \hline 12 & 9 & 6 \\ \hline \end{array}$$

సమాధానం : $24\times54=1296$

మూడంకెల సంఖ్యల గుణకారము

ఉదాహరణ 3 :

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2\ \ 3 \\ \times 4\ \ 5\ \ 6 \\ \hline ------ \\ \hline \end{array}$$

గుణించవలసిన సంఖ్యలలోని అంకెలను క్రింద సూచించిన విధంగా వేసుకోవాలి.

i) ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

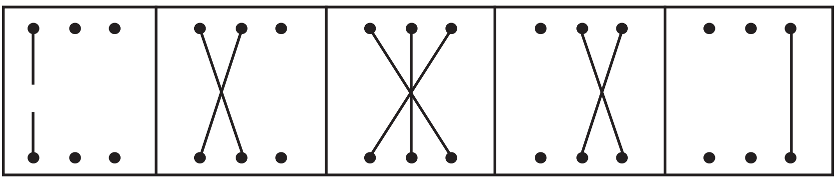
ii) ఒకట్లు, పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

iii) ఒకట్లు, పదులు, వందల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

iv) పదులు, వందల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

v) వందల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

గుణించవలసిన అంకెల మధ్య గల బంధాలను ఈ క్రింది బొమ్మ సూచిస్తుంది.



1. ముందుగా, ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో

```
   3
   6
 ----
  18
 ----
  ₁8
 ----
```

ఈ 18లో 1ని, పదుల స్థానంలో వచ్చే అంకెకు కలపవలసి వుంటుంది.

2. ఒకట్ల స్థానము, పదుల స్థానములలో ఉన్న అంకెలతో

```
 1  2  3          2   3
 4  5  6          5   6
---------        -------
                  2×6+3×5=12+15=27
---------        -------
```

3. ఒకట్లు, పదులు, వందలు స్థానాల్లో ఉన్న అన్ని అంకెలతో

```
   1  2  3        1  2  3
 ×4  5  6         4  5  6
----------       ---------
                  1×6+2×5+3×4=6+10+12=28
----------       ---------
```

(నిలువు, ఏటవాలు గుణకారాలతో వచ్చిన లబ్ధాలను కలపాలి.)

7. ఒకట్ల స్థానాలను వదిలేసి, పదులు, వందల స్థానాల్లో మాత్రమే ఉన్న అంకెలతో

1	2	3
×4	5	6

1	2
4	5

1×5+2×4=5+8=13

8. పదుల స్థానాన్ని కూడా వదిలివేసి, వందల స్థానంలో ఉన్న అంకెలతో మాత్రమే.

1	2	3
×4	5	6

1
4

1×4=4.

ఇప్పటి స్థితి :

1	2	3
×4	5	6

	1 4	1 2 4 5	1 2 3 4 5 6	2 3 5 6	3 6
	4	13	28	27	18
	4	$_1$3	$_2$8	$_2$7	$_1$8
=	5	6	0	8	8

సమాధానం = 123×456= 56088

13. గుణకారములు-9 (ద్వంద్వ యోగః)

సూత్రం : ద్వంద్వ యోగః

అర్థం :- జంటగా కలుపుట

వివరణ :- ఈ సూత్రంతో ఏ సంఖ్యకైనా వర్గాన్ని చాలా సులభంగా కనుక్కోవచ్చును. "ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్" సూత్రంలో మాదిరిగానే ఈ సూత్రంలో కూడ అంకెలను నిలువుగాను, ఏటవాలుగాను తీసుకుని గుణించాలి.

రెండంకెల సంఖ్యకు వర్గాన్ని కనుగొనుట

ఉదాహరణ 1: 21^2=? 21కి వర్గము ఎంత ?

పద్ధతి 1 : 21^2 అంటే 21ని 21తో గుణించుట అని అర్థం. దీని కొరకు అంకెలను ఈ క్రింది విధంగా వేసుకోవాలి.

	2	1	
	2	1	
స్టెప్-1	↑2 2	2 ⤨ 1 2 1	1↑ 1
స్టెప్-2	4	2×1+2×1	1
స్టెప్-3	4	4	1

స్టెప్-4 సమాధానం : 21^2=441

పద్ధతి 2 : వర్గం కనుగొనునప్పుడు, గుణిస్తున్న రెండు సంఖ్యలు కూడా ఒకటే అయి ఉంటాయి కనుక, పై లెక్కను ఈ క్రింది విధంగా స్టెప్-2లో కొంచెము సూక్ష్మీకరించి, వ్రాయవచ్చును.

	2	1	
	2	1	
స్టెప్-1	↑2 2	2 ⤨ 1 2 1	1 ↑ 1
స్టెప్-2	4	2(2×1)	1
స్టెప్-3	4	4	1

స్టెప్-4 సమాధానం :- 21^2=441

గమనిక : మొదటి పద్ధతికి రెండవ పద్ధతికి భేదం చాలా స్వల్పం. ఆ భేదం కూడా స్టెప్–2లో మాత్రమే కనిపిస్తుంది. దీనిని అనే a, b పరిభాషలో నేర్చుకుందాము.

a, b పరిభాషలో వర్గాన్ని కనుగొనుట :

1. a b అనేది ఒక సంఖ్య అనుకుందాము. అందులో a అనేది పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె, b అనేది ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె అని అనుకొందాం.

2. ఆల్జీబ్రా (బీజగణితం)లో అయితే, ab అని వ్రాస్తే a ని bతో గుణించమని అర్థం చెబుతారు. కాని ఇక్కడ అర్థం అది కాదు.

3. ab అనేది ఒక సంఖ్యగా తీసుకొందాము. ఇపుడు కావలసింది ab యొక్క వర్గము. అంటే $(ab)^2$

4. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాసుకొందాము.

a b

a b

↑a	a b	b ↑
a	a ╳ b	b
a^2	axb+axb	b^2
a^2	2xaxb	b^2
a^2	2x(axb)	b^2

5. ఇందులో గుర్తుంచుకోవలసినది – ఒక స్థానంలో ఒక అంకె మాత్రమే పట్టగలదు. గుణకారము చేయునప్పుడు, ఒక అంకె కంటె ఎక్కువ విలువ ఉన్న సంఖ్య వస్తే, ఆ ఎక్కువ విలువను ఎడమవైపున ఉండే తర్వాత స్థానములో ఉన్న అంకెకు కలపాలి.

ఉదాహరణ 2: 57^2 = ? (57కు వర్గము ఎంత?)

5 7

5 7

పైన వివరించిన ab పరిభాష సహాయంతో :-

5^2	2×(5×7)	7^2
25	70	49
25	$_7$0	$_4$9
32	4	9

సమాధానం : 57^2=3249

మూడంకెల సంఖ్యకు వర్గం కనుగొనుట

1. రెండంకెల సంఖ్య యొక్క వర్గాన్ని కనుగొనుటకు ab పరిభాషలో వివరించినట్లుగానే, మూడంకెల సంఖ్యకు వర్గాన్ని కనుగొనుటకు abc పరిభాషలో ఈ క్రింద వివరించబడింది. abc అనేది ఒక సంఖ్యగా తీసుకొందాము.

2. ఇందులో a అనేది వందల స్థానంలో ఉన్న అంకె

b అనేది పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె

c అనేది ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె అని అనుకొందాము.

3. ఇపుడు "abc" సంఖ్య యొక్క వర్గాన్ని కనుగొనాలి.

(a b c) x (a b c) = ?

4. "ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్" సూత్రంలో వివరించిన విధంగా, వానిని గ్రూపులుగా వ్రాసుకోవాలి.

a a	a b a b	a b c a b c	b c b c	c c
axa	(axb+axb)	(axc+bxb+axc)	(bxc+bxc)	(cxc)
a^2	(2xaxb)	(b^2+2xaxc)	(2xbxc)	c^2

5. ఇక్కడ కూడా గుర్తుంచుకోవలసినది – గుణకారము చేయునపుడు ఒక అంకె కంటె ఎక్కువ విలువ ఉన్న సంఖ్య వస్తే, ఆ ఎక్కువ విలువను ఎడమ వైపున ఉండే

తర్వాత స్థానములో ఉన్న అంకెకు కలపాలి.

ఉదాహరణ 3 :

734^2=? 734 యొక్క వర్గము ఎంత ?

7 3 4

7 3 4

పైన వివరించిన abc పరిభాష సహాయంతో :–

7^2	$2(7\times3)$	$(3^2+2\times7\times4)$	$(2\times3\times4)$	4^2
49	42	65	24	16
49	$_4$2	$_6$5	$_2$4	$_1$6
53	8	7	5	6

సమాధానము : 538756

ఉదాహరణ 4 : 251^2 = ? (251 యొక్క వర్గము ఎంత ?)

2 5 1

2 5 1

2^2	$2(2\times5)$	$(5^2+2\times2\times1)$	$(2\times5\times1)$	1^2
4	20	29	10	1
4	$_2$0	$_2$9	$_1$0	1
6	3	0	0	1

సమాధానము : 63001

నాలుగంకెల సంఖ్యకు వర్గాన్ని కనుగొనుట

పైన వివరించినట్లుగానే a,b,c,d అనే అంకెలతో abcd అనే సంఖ్య ఏర్పడింది

అని అనుకొందాము. ఆ సంఖ్యకు వర్గాన్ని కనుగొనాలి.

a b c d

a b c d

---

a a	a b a b	a b c a b c	a b c d a b c d
(a^2)	2x(axb)	$(b^2+2xaxc)$	2x(axd+bxc)

b c d b c d	c d c d	d d
$c^2+2x(bxd)$	2x(cxd)	d^2

ఉదాహరణ 5 : $5471^2 = ?$ (5471 యొక్క వర్గమెంత ?)

5 4 7 1

5 4 7 1

5^2	$2\times(5\times4)$	$(4^2+2\times5\times7)$	$2\times(5\times1+4\times7)$	$7^2+2\times(4\times1)$	$2\times(7\times1)$	1^2
25	40	86	66	57	14	1
25	${}_{4}0$	${}_{8}6$	${}_{6}6$	${}_{5}7$	${}_{1}4$	1
29	9	3	1	8	4	1

సమాధానం : 29931841

ఉదాహరణ 6 : $3287^2 = ?$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

3^2	$2\times(3\times2)$	$(2^2+2\times3\times8)$	$2\times(3\times7+2\times8)$	$8^2+2\times(2\times7)$	$2\times(8\times7)$	7^2
9	12	52	74	92	112	49
9	$_{1}2$	$_{5}2$	$_{7}4$	$_{9}2$	$_{11}2$	$_{4}9$
10	8	0	4	3	6	9

సమాధానం : 10804369

Vedic Mathematics - 1

Dr. Remella Avadhanulu
M.Sc.(Nuclear Physics), M.A., Ph.D. (Sanskrit)
M.A., Ph.D. (Jyotisha)
Dy. Director (Computers) (Retd.), NIMS
Hyderabad

Volume 1

DVD

Golden Nandi Award for
"First Best Educational T.V. Programme"
(Vedic Mathematics, 2008)

Release of "Vedic Mathematics Book"
by H.E. Shri Rameshwar Thakur
Governor of Andhra Pradesh, 2006

SHRI VEDA BHARATHI
(A Public Charitable Trust dedicated for research in Vedas and Sanskrit)
H.No. H-34, Madhuranagar, Hyderabad - 500 038
Ph: 040 - 23812577, 098494 59316 shrivedabharathi@gmail.com
www.shrivedabharathi.org www.shrivedabharathi.com

Powered by
SmarTeach™

భాగం-2

14. వింకులం సంఖ్యలు

ఉపోద్ఘాతం :

బీజగణితంలో వాడుకునే సంఖ్యలు ధన సంజ్ఞ (+) గాని, ఋణసంజ్ఞ (–) గాని కలిగి ఉంటాయి. ఉదాహరణకు + 75, – 43 మొదలయినవి.

ఇక్కడ ధన సంజ్ఞ (+) గాని ఋణ సంజ్ఞ (–) గాని ఆ మొత్తం సంఖ్య అంతకూ వర్తిస్తుంది. పై ఉదాహరణలో (+) గుర్తు పదుల స్థానంలో ఉన్న 7కు, ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 5 కు వర్తిస్తుంది. అదే విధంగా (–) గుర్తు పదుల స్థానంలో ఉన్న 4 కు, ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 3 కు వర్తిస్తుంది.

ఒకసంఖ్యలో చాలా అంకెలు ఉన్నప్పుడు, అందులో ఏ ఒక్క అంకెకు గాని, అంకెల సమూహానికి గాని ఋణసంజ్ఞను (–) వర్తింపచేయడానికి 'వింకులం' పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

లాటిన్ భాషకు చెందిన 'వింకులం' అనే పదానికి గొలుసు)di bjo* , లేదా బంధం)Cpoe* అని అర్థం.

గుణకారం గాని, భాగహారం గాని, 5 లోపుగా ఉన్న అంకెలతో సులువుగా ఉంటుంది. 5పైన ఉన్న అంకెలతో కొంచెము అసౌకర్యము అనిపిస్తుంది. అందుచేత 5పైన ఉన్న అంకెలను 5లోపు అంకెలుగా మార్చి వ్రాయడానికి 'వింకులం' పద్ధతి కొంతవరకు ఉపయోగపడుతుంది.

వింకులం పద్ధతిలో ఏర్పడే సంఖ్యలను 'వింకులం సంఖ్యలు' అంటారు.

వింకులం సంఖ్యలను కనుగొనే విధానం

దీనిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకొందాము.

ఉదాహరణ : 6 అనే సంఖ్యకు వింకులం సంఖ్యను కన్గొనుట

$6=10-4= 2\bar{5}$

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 6

2. ఇచ్చిన సంఖ్యకంటె పెద్దదయినదశాంశ విధాన సంఖ్యను గుర్తించాలి

   ఈ ఉదాహరణలో గుర్తించిన దశాంశ విధాన సంఖ్య =10

3. గుర్తించిన దశాంశ విధాన సంఖ్యకు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు గల భేదాన్ని గుర్తించాలి

   భేదం = 10–6=4

4. గుర్తించిన దశాంశవిధాన సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయో, సమాధానంలో అన్ని అంకెలు మాత్రమే ఉంటాయి.

   సమాధానం = ××

   ఇక్కడ ఆయా స్థానాల్లో రాగల అంకెలను × సూచిస్తుంది.

5. గుర్తించిన దశాంశ విధాన సంఖ్యలో చివరన ఉన్న 'సున్న' లను వదలివేయాలి. అంటే ఇక్కడి '10' లో ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న '0' నివదలి, పదుల స్థానంలో ఉన్న '1' ని మాత్రమే గ్రహించాలి.

   సమాధానం = 1×

6. భేదాన్ని (అంటే, 4ని) సమాధానంలో చివరి స్థానంలో వ్రాసి, దానిపై అడ్డగీత వ్రాయాలి.

   సమాధానం = $1\bar{4}$

7. ఈ సమాధానంలో వచ్చిన $1\bar{4}$ ని 'వింకులం సంఖ్య' అంటారు.

   వింకులం సంఖ్య = $1\bar{4}$

8. ఇక్కడ వింకులం సంఖ్యలో 4 పైన మాత్రమే అడ్డగీత వ్రాయబడింది. అంటే ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 4 అనే అంకె మాత్రమే ఋణసంజ్ఞ (–) కల్గి ఉంటుంది.

పదుల స్థానంలో ఉన్న 1 పైన అడ్డగీత వ్రాయబడలేదు. అది ధన సంజ్ఞతో ఉన్నట్లుగా భావించాలి.

ఇంకా కొన్ని ఉదాహరణలు :-

$7 = 10 - 3 = 1\bar{3}$

$8 = 10 - 2 = 1\bar{2}$

$9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$

రెండు అంకెలతో ఏర్పడే సంఖ్యలకు 'వింకులం' సంఖ్యలు

$18 = 20 - 2 = 2\bar{2}$

$19 = 20 - 1 = 2\bar{1}$

$97 = 100 - 3 = 10\bar{3}$

$89 = 90 - 1 = 9\bar{1}$

మూడుగాని, అంతకంటె ఎక్కువగాని, అంకెలతో ఏర్పడే సంఖ్యలకు 'వింకులం' సంఖ్యలు

$185 = 200 - 15 = 2\bar{1}\bar{5}$

$191 = 200 - 9 = 20\bar{9}$

$289 = 300 - 11 = 3\bar{1}\bar{1}$

$1007 = 1010 - 3 = 101\bar{3}$

$9999 = 10000 - 1 = 1000\bar{1}$

ఋణ సంజ్ఞ ఎక్కడ ఉండవచ్చును ?

అంకెలపైన ఉన్న అడ్డగీత ఈ 'వింకులం' సంఖ్యలలో చివరనే ఉండాలని నియమం లేదు.

ఉదాహరణలు :-

$383 = 403 - 20 = 4\,\bar{2}\,3$

$4983 = 5003 - 20 = 50\,\bar{2}\,3$

$17942 = 20042 - 2100 = 2\,\bar{2}\,\bar{1}\,42$

$3168924 = 3200024 - 31100 = 3\,2\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{1}\,2\,4$

'వింకులం' సంఖ్యలతో కూడికలు, తీసివేతలు

$\bar{4} + \bar{3} = \bar{7}$

$\bar{4} - \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{4} - \bar{4} = 2$

$5 + \bar{2} = 3$

$\bar{5} - 2 = \bar{7}$

$\bar{5} - \bar{2} = \bar{3}$

'వింకులం' సంఖ్యలతో గుణకారాలు, భాగహారాలు

$\bar{2} \times \bar{3} = 6$

$\bar{2} \times 3 = \bar{6}$

$\bar{6} \div \bar{2} = 3$

$\bar{6} \div 2 = \bar{3}$

వింకులం గుర్తు నుండి బయటపడడానికి (లేక, సాధారణ విలువను కన్గొనుటకు)
పద్ధతి :-

1. **వింకులం సంఖ్యలో ఒకే అంకె ఉన్నప్పుడు**

$\bar{1} = -1 = -10 + 9$

$\bar{2} = -2 = -10 + 8$

$\bar{3} = -3 = -10 + 7$

$\bar{4} = -4 = -10 + 6$

$\bar{5} = -5 = -10 + 5$

$\bar{6} = -6 = -10 + 4$

$\bar{7} = -7 = -10 + 3$

$\bar{8} = -8 = -10 + 2$

$\bar{9} = -9 = -10 + 1$

2. **వింకులం సంఖ్యలో రెండు అంకెలు ఉన్నపుడు :-**

$\bar{1}9 = -10 + 9 = -1$

$\bar{1}8 = -10 + 8 = -2$

$\bar{1}7 = -10 + 7 = -3$

$\bar{1}6 = -10 + 6 = -4$

$\bar{1}5 = -10 + 5 = -5$

$\bar{1}4 = -10 + 4 = -6$

$\bar{1}3 = -10 + 3 = -7$

$\bar{1}2 = -10 + 2 = -8$

$\bar{1}1 = -10 + 1 = -9$

$\bar{1}0 = -10 + 0 = -10$

$1\bar{3} = 10 - 3 = 7$

$1\bar{8} = 10 - 8 = 2$

$9\bar{2} = 90 - 2 = 88$

3. వింకులం సంఖ్యలో మూడంకెలు ఉన్నపుడు :-

$1\bar{2}3 = (10 - 2)\,3 = 83$

$1\overline{23} = (100 - 23) = 77$

$\overline{123} = -123$

$\bar{1}23 = -100 + 23 = -77$

$\bar{1}2\bar{3} = \bar{1}\,(2\bar{3}) = \bar{1}\,(20-3)$

$\bar{1}\,17 = -100 + 17 = -83$

$5\bar{8}2 = (5\bar{8})\,2 = (50 - 8)\,2 = 422$

$5\overline{82} = 5\,(\overline{82}) = 500 - 82$

$= 418$

4. వింకులం సంఖ్యలో చాలా అంకెలు ఉన్నపుడు :-

$1\bar{6}58\bar{2} = (10-6)\,5\,(80-2)$

$= 4578$

$\bar{1}65\overline{82} = \bar{1}\,(65\overline{82})$

$= \bar{1}\,(6500 - 82)$

$= \bar{1}\,6418$

$= -10000 + 6418$

$= -3582$

దీనినే ఇంకో రకంగా సాధించవచ్చు :-

$\bar{1}65\overline{82} = (\bar{1}65)\,\overline{82}$

$= (-100+65)\,\overline{82}$

$= (-35)\,\overline{82}$

$= (-35)\,(-82)$

$= -3582$

ఈ విధంగా సాధారణ సంఖ్యలను వింకులం సంఖ్యలుగా మార్చవచ్చు. వింకులం సంఖ్యలను సాధారణ సంఖ్యల విలువ రూపంలోకి మార్చవచ్చు.

ఇందులో ప్రధానంగా గుర్తుంచుకోవలసిన విషయాలు :-

- ఒక వింకులం సంఖ్య యొక్క విలువ ఎప్పుడూ ఒకే విధంగా ఉంటుంది.
- కాని, ఒకే విలువ గల్గిన వింకులం సంఖ్యలు చాలా ఉండవచ్చును.

5. ఒకే విలువగల వింకులం సంఖ్యల రూపాలు :-

ఉదాహరణలు :-

$2 = 10 - 8 = 1\bar{8}$

$2 = 100 - 98 = 1\bar{9}\bar{8}$

$2 = 1000 - 998 = 1\bar{9}\bar{9}\bar{8}$

$12 = 100 - 88 = 1\bar{8}\bar{8}$

$12 = (1)2$

$= (10 - 9)\ 2 = 1\bar{9}2$

$72 = 80 - 8 = 8\bar{8}$

$72 = 100 - 28 = 1\bar{2}\bar{8}$

$72 = (7)\ 2 = (10 - 3)\ 2 = 1\bar{3}2$

సమాధానంగా వచ్చిన వింకులం సంఖ్యలోని అంకెలకు విడివిడిగా మళ్ళీ మళ్ళీ వింకులం సంఖ్యలను వాడవచ్చు.

ఈ విధంగా ఒకే విలువకు అనేక రూపాలలో వింకులం సంఖ్యలు ఉండవచ్చును.

6. రెండంకెల వింకులం సంఖ్యల గుణకారములు

ఉదాహరణ1 :- $3\bar{2} \times 4\bar{1} = ?$

ఇక్కడ వింకులం సంఖ్య $3\bar{2}$ యొక్క విలువ

$= (30 - 2) = 28$

వింకులం సంఖ్య $4\bar{1}$ యొక్క విలువ

$= (40-1) = 39$

అందుచేత ఇచ్చిన సమస్య 28×39 కి సమానం.

(A) పాఠశాలల్లో నేడు నేర్పుతున్న పద్ధతిలో :-

$28 \times 39 = ?$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 39 \\ \hline 252 \\ 84 \\ \hline 1092 \\ \hline \end{array}$$

(B) 'ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్' సూత్రంతో :-

$$\begin{array}{cc} 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 \;\; 8 & 8 \\ \uparrow & \times & \uparrow \\ 3 & 3 \;\; 9 & 9 \\ \hline 6 & (3\times8+9\times2) & 72 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & (24+18) & 72 \\ 6 & 42 & 72 \\ \hline 6 \;\; 4 & 2 \;\; 7 & 2 \\ \hline 10 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

సమాధానము ః 1092

(C) **వింకులం సంఖ్యల గుణకారాన్ని " ఊర్ధ్వతిర్యగ్భ్యాం" సూత్రంతో :-**

$$\begin{array}{ll} 3 & \bar{2} \\ 4 & \bar{1} \\ \hline \end{array}$$

3 ↑ 4	$3 \quad \bar{2}$ ⤫ $4 \quad \bar{1}$	$\bar{2}$ ↑ $\bar{1}$
4×3	$(4 \times \bar{2} + \bar{1} \times 3)$	$(\bar{1} \times \bar{2})$
(12)	$(\bar{8} + \bar{3})$	(2)
12	$\bar{1}\bar{1}$	2
12	$\bar{1}$ $\bar{1}$	2
11	$\bar{1}$	2

$= (11 \ \bar{1})2$

$= (110 - 1)2$

$= 1092$

సమాధానం :- $3\bar{2} \times 4\bar{1} = 1092$

మూడంకెల వింకులం సంఖ్యల గుణకారములు :

ఉదాహరణ2 : $4\bar{1}\bar{2} \times 5\bar{1}3 = ?$

వింకులం సంఖ్య $4\bar{1}\bar{2} = 400 - 12 = 388$

వింకులం సంఖ్య $5\bar{1}3 = (50 - 1)\ 3 = 493$

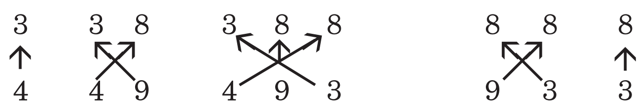
ఇచ్చిన సమస్య 388×493 కి సమానము

a) **పాఠశాలల్లో నేడు నేర్పుతున్న పద్ధతిలో :-**

```
   388
   493
 ------
  1164
 3492
1552
 ------
191284
 ------
```

b) "ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యాం" సూత్ర సహాయంతో :-

3	8	8
4	9	3



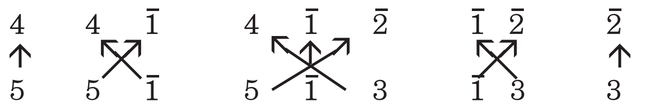
(12)	(4×8+9×3)	(4×8+9×8+3×3)	(9×8+3×8)	(8×3)
(12)	(32+27)	(32+72+9)	(72+24)	(24)
(12)	(59)	(113)	(96)	(24)
12	9 / 5	3 / 11	6 / 9	4 / 2
19	1	2	8	4

సమాధానము : 388 × 493 = 191284

c) **వింకులం సంఖ్యల గుణకారాన్ని “ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యాం” సూత్రంతో :-**

$4\bar{1}\bar{2} \times 5\bar{1}3 = ?$

4	$\bar{1}$	$\bar{2}$
5	$\bar{1}$	3



20	$(5\times\bar{1}+\bar{1}\times4)$	$(5\times\bar{2}+\bar{1}\times\bar{1}+3\times4)$	$(\bar{1}\times\bar{2}+3\times\bar{1})$	$(3\times\bar{2})$
(20)	$(\bar{5}+\bar{4})$	$(\overline{10}+1+12)$	$(2+\bar{3})$	$(\bar{6})$
20	$\bar{9}$	3	$\bar{1}$	$\bar{6}$
(20	$\bar{9}$)	(3	$\bar{1}$	$\bar{6}$)
(200−9)	(300−16)			
191284				

సమాధానం :- $4\bar{1}\bar{2} \times 5\bar{1}3 = 191284$

నాలుగంకెల వింకులం సంఖ్యల గుణకారములు :-

ఉదాహరణ 3 :-

$10\ \bar{3}\ \bar{2}\ 3 \times 3\ \bar{2}\ \bar{4}\ \bar{3} = ?$

వింకులం సంఖ్య $10\ \bar{3}\ \bar{2}\ 3$ యొక్క విలువ

$= (10\ \bar{3}\ \bar{2})\ 3$

$= (1000 - 32)\ 3$

$= (968)\ 3$

$= 9683$

వింకులం సంఖ్య $3\bar{2}\bar{4}\bar{3}$ యొక్క విలువ

$= (3\bar{2}\bar{4}\bar{3})$

$= (3000 - 243)$

$= 2757$

ఇచ్చిన సమస్య 9683 × 2757 కు సమానం.

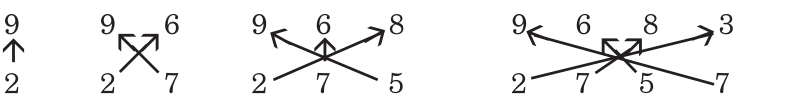
a) **పాఠశాలల్లో నేర్పుతున్న పద్ధతిలో :-**

```
    9683
    2757
 --------
   67781
  48415
 67781
19366
--------
26696031
--------
```

b) **"ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యాం" సూత్ర సహాయంతో :-**

9683

2757



(18) (2×6+7×9) (2×8+7×6+5×9) (2×3+7×8+5×6+7×9)

(7×3+5×8+7×6) (5×3+7×8) (7×3)

(18) (12+63) (16+42+45) (6+56+30+63) (21+40+42) (15+56) (21)

(18) (75) (103) (155) (103) (71) (21)

18	5	3	5	3	1	1
7	10	15	10	7	2	
26	6	9	6	0	3	1

సమాధానము ః $9683 \times 2757 = 26696031$

c) **వింకులం సంఖ్యల గుణకారాన్ని "ఊర్ధ్వతిర్యగ్భ్యాం" సూత్రంతో :-**

$10\bar{3}\bar{2}3$

$03\bar{2}\bar{4}\bar{3}$

$(0\times1)\ (0\times0+3\times1)\ \ (0\times\bar{3}+3\times0+\bar{2}\times1)\ \ (0\times\bar{2}+3\times\bar{3}+\bar{2}\times0+\bar{4}\times1)$

$(0x3+3x\bar{2}+\bar{2}x\bar{3}+\bar{4}x0+\bar{3}x1)\ (3x3+\bar{2}x\bar{2}+\bar{4}x\bar{3}+\bar{3}x0)$

$(\bar{2}\times3+\bar{4}\times\bar{2}+\bar{3}\times\bar{3})\ \ (\bar{4}\times3+\bar{3}\times\bar{2})\ \ (\bar{3}\times3)$

0	3	$\bar{2}$	$\bar{9}+\bar{4}$	$\bar{6}+6+\bar{3}$	$9+4+12$	$\bar{6}+8+9$	$\bar{1}\bar{2}+6$	$\bar{9}$
0	3	$\bar{2}$	$\bar{1}\bar{3}$	$\bar{3}$	25	11	$\bar{6}$	$\bar{9}$
0	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$ / $\bar{1}$	$\bar{3}$	5 / 2	1 / 1	$\bar{6}$	$\bar{9}$
0	3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	6	1	$\bar{6}$	$\bar{9}$
	2	6	6	9	6	0	3	1

సమాధానము ః $10\bar{3}\bar{2}3 \times 03\bar{2}\bar{4}\bar{3} = 26696031$

15. ఘనం-1 (యావదూనం)

సూత్రం :- "యావదూనం"

అర్థం :- "ఎంత తక్కువో అంత..."

వివరణ :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనము (CUBE) కన్గొనుటకు "యావదూనం" సూత్రం పరోక్షంగా ఉపయోగిస్తుంది.

2. ఇచ్చిన సంఖ్యకు దగ్గర్లో ఉన్న ప్రాతిపదిక
   (10^n ను గుర్తించాలి.

3. ఇచ్చిన సంఖ్యకు, ప్రాతిపదికకు గల భేదాన్ని కనుక్కోవాలి.

4. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనం =
   (ఇచ్చిన సంఖ్య + 2× భేదం) | 3×(భేదం)^2 | భేదం)^3

4. ప్రాతి పదికలోని సున్నాల సంఖ్యను బట్టి, పై స్థానాలోన్ని సంఖ్యలకు తగిన సవరణలు చేయాలి.

9^3 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 9
2. ప్రాతి పదిక = 10
3. భేదం = 9−10 = (−1)
4. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనం =

(ఇచ్చిన సంఖ్య + 2×భేదం) | 3×(భేదం)^2 | భేదం)^3

$= (9+2\times(-1) \mid 3\times(-1)^2 \mid -1)^3$

$= 9-2 \mid 3\times1 \mid -1$

$= 7 \mid 3 \mid \bar{1}$

$= 7\ (30-1) = 729$

సమాధానం $9^3 = 729$

ఉదాహరణ 2 :-

$8^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 8
2. ప్రాతి పదిక = 10
3. భేదం = 8−10 = −2
4. ఘనం = $8+2\times(-2) \mid 3\times(-2)^2 \mid (-2)^3$

$= 8-4 \mid 12 \mid -8$

$= 4 \mid 12 \mid \bar{8}$

$= 4 \mid {}_1 2 \mid \bar{8}$

$= 5\ 2\ \bar{8}$

$= 5\ (20-8) = 5(12)$

సమాధానం = 512

ఉదాహరణ 3 :-

$12^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 12
2. ప్రాతిపదిక = 10
3. భేదం = 12−10 = 2
4. ఘనం = $12+2\times(2) \mid 3\times(2)^2 \mid (2)^3$

$= 12+4 \mid 3\times4 \mid 8$

$= 16 \mid 12 \mid 8$

$= 16 \mid {}_1 2 \mid 8$

సమాధానం = 1728

ఉదాహరణ 4 :-

$16^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 16
2. ప్రాతిపదిక = 10
3. భేదం = 16−10 = 6
4. ఘనం = $16+2\times6 \mid 3\times6^2 \mid 6^3$

$= 16+12 \mid 108 \mid 216$

=	28	8	6
	10	21	
=	40	9	6

సమాధానం = 4096

ఉదాహరణ 5 :-

$98^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 98
2. ప్రాతిపదిక = 100
3. భేదం = 98−100 = −2
4. ఘనం = $98+2\times(-2) \mid 3\,(-2)^2 \mid (-2)^3$

=	98−4	3×4	−08
=	94	12	$\bar{0}\bar{8}$

$= 94\ (1200-08)$

సమాధానం = 941192

ఉదాహరణ 6 :-

$102^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 102
2. ప్రాతి పదిక = 100
3. భేదం = 102−100 = 2
4. ఘనం = $102+2\times2 \mid 3\times(2)^2 \mid (2)^3$

$= 102+4 \mid 3\times4 \mid 08$

$= 106 \mid 12 \mid 08$

సమాధానం = 1061208

ఉదాహరణ7 :-

$107^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 107
2. ప్రాతి పదిక = 100
3. భేదం = 107−100 = 7
4. ఘనం = $107+2\times7 \mid 3\times7^2 \mid 7^3$

$= 107+14 \mid 3\times49 \mid 343$

$= 121 \mid 147 \mid 343$

$= 121 \mid 47 \mid 43$

$\quad\quad\;\; {}_{1} \quad\;\; {}_{3}$

$= 122 \quad 50 \quad 43$

సమాధానం : 1225043

16. ఘనం-2 (ఆనురూప్యేణ)

సూత్రం :- ఆనురూప్యేణ

అర్థం :- తగినట్లుగా/ నిష్పత్తితో

వివరణ :-

1. కొన్ని సంఖ్యలకు ఘనాన్ని కన్గొనుటలో 'ఆనురూప్యేణ' అనే సూత్రం చాలా ఉపయోగ పడుతుంది.
2. 'ab' అనేది ఇచ్చిన సంఖ్య అనుకొందాము.
3. 'ab' అనే సంఖ్యలో 'a' అనేది పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెను,'b' అనేది ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను సూచిస్తాయి. దీనికి ఘనాన్ని కనుగొనాల్సి ఉంది. $('ab')^3 = ?$
4. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనాన్ని కనుగొనే విధానాన్ని అర్థంచేసుకోవడానికి $(a+b)^3$ సూత్రాన్ని వివరంగా వ్రాయాల్సి ఉంది.
5. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. ఇది అందరికీ తెలిసిందే.
6. ఈ పై వివరణ వాక్యాన్ని రెండు వరుసలలోకి విడదీసి కూడా వ్రాయవచ్చు.
   మొదటి వరుస = a^3 a^2b ab^2 b^3
   రెండవ వరుస = $2a^2b$ $2ab^2$
7. ఈ రెండు వరుసలను కలిపితే, మొత్తం విలువలో ఏమీ మార్పు ఉండదు.
8. మొదటి వరుసలోని పదాలను పరిశీలిస్తే, అంటే $(a^3\ a^2b\ ab^2b^3)$లను గమనిస్తే, అన్ని సఖ్యలూ ఒకే నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి.

$$\text{నిష్పత్తి} = \frac{b^3}{ab^2} = \frac{ab^2}{a^2b} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}$$

9. అందుచేతనే, మొదటి వరుసలోని సంఖ్యలన్నీ "అనురూప్యేణ" (తగ్గినట్లుగా/ నిష్పత్తితో) ఉన్నాయని తెలుస్తుంది,
10. పై నియమాలను అనుసరించి, సంఖ్యలను రెండు వరుసలలో వ్రాసుకొని, వాటిని కలపాలి.

11. ఒక్కొక్క స్థానంలో ఉండవలసిన అంకెలను ప్రాతిపదికను బట్టి నిర్ణయించుకొని తగిన సవరణలు చేయాలి.

ప్రాతిపదిక = 10 అయినచో, ఒక్కొక్క స్థానంలో ఒక అంకె ఉండాలి.

ప్రాతిపదిక = 100 అయినచో, ఒక్కొక్క స్థానంలో రెండు అంకెలు ఉండాలి.

ఉదాహరణ 1 :-

$12^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = ab = 12

a = 1

b = 2

నిష్పత్తి = $\frac{b}{a}$ $\frac{2}{1}$

2. $a^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

3. నిష్పత్తి నియమాన్ని అనుసరించి వ్రాయగా

	మొదటి వరుస	= 1	2	4	8
4.	రెండవ వరుస	=		4	8
5.	మొత్తం విలువ	= 1	6	12	8
		= 1	6	2 (1 carried)	8
		= 1	7	2	8

సమాధానం = 1728

ఉదాహరణ 2 :-

$13^3 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = ab = 13

a = 1

b = 3

నిష్పత్తి = $\frac{b}{a} = \frac{3}{1} = 3$

2. $a^3 = 1\times1\times1 = 1$

3. నిష్పత్తి నియమాన్ననుసరించి వ్రాయగా

మొదటి వరుస	=	1	3	9	27
4. రెండవ వరుస	=		6	18	
5. మొత్తం విలువ	=	1	9	27	27
	=	1	9	7 (2)	7 (2)
	=	2	1	9	7

సమాధానం= 2197

ఉదాహరణ 3 : 23^3 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = ab = 23

$a = 2$

$b = 3$

నిష్పత్తి = $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

2. $a^3 = 2^3 = 2\times2\times2 = 8$

3. నిష్పత్తి నియమాన్ని అనుసరించి వ్రాయగా

మొదటి వరుస	=	8	12	18	27
రెండవ వరుస	=		24	36	
మొత్తం విలువ	=	8	36	54	27
		8	6 (3)	4 (5)	7 (2)
	=	12	1	6	7

సమాధానం = 12167

=

ఉదాహరణ 4 : 113^3 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = ab =113

   దీనిని రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చును.

   మొదటి రకం : a = 11, b = 3, ప్రాతిపదిక = 10

   రెండవ రకం : a = 1, b = 13, ప్రాతిపదిక = 100

2. **మొదటి రకంగా సాధించుటకు**

   నిష్పత్తి = $\frac{b}{a} = \frac{3}{11}$

3. a^3 = 11×11×11 = 1331

4. నిష్పత్తి నియమాన్న నుసరించి వ్రాయగా

	మొదటి వరుస =	1331	363	99	27
	రెండవ వరుస =		726	198	
5.	మొత్తం విలువ =	1331	1089	297	27
		1331	9	7	7
			108	29	2
		1442	8	9	7

సమాధానం = 1442897

B. 2. రెండవ రకంగా సాధించుటకు

   నిష్పత్తి = $\frac{b}{a} = \frac{13}{1}$

3. a^3 = 1×1×1=1

4. నిష్పత్తి నియమాన్ననుసరించి వ్రాయగా

	మొదటి వరుస =	1	13	169	2197
	రెండవ వరుస =		26	338	
5.	మొత్తం విలువ=	1	39	507	2197
		1	39	07	97
				5	21
	=	1	44	28	97

సమాధానం = 1442897

17. భాగహారములు-1 (ఏకాధికేనపూర్వేణ)

సూత్రం :- ఏకాధికేనపూర్వేణ - కుడివైపునుండి

అర్థం :- "ముందు దానికంటే ఒకటి ఎక్కువ అయినదానితో"

గమనిక : సమాధానాన్ని కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు వ్రాయు పద్ధతి:

వివరణ : వైదిక గణితంలోని సూత్రాలు గుణకారాలకు, భాగహారాలకు కూడా పనికి వస్తాయి. ముఖ్యంగాపైన పేర్కొన్న సూత్రం1/19, 1/29 మొదలయిన భిన్నాల విలువలను సులభంగా కన్గొనుటకు ఉపయోగపడుతుంది. ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి 1/19 విలువను కన్గొనే పద్ధతి ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

ఉదాహరణ1 : 1/19= ?

పాత పద్ధతి

1/19 కి మామూలుగా ప్రస్తుతము వాడుకలో ఉన్న పద్ధతితో చేస్తే ఇలా ఉంటుంది.

```
19) 1.00 (0.052631578947368421)
     95
    ------
      50
      38
    ------
     120
     114
    ------
        60
        57
      ------
          30
          19
        ------
          110
           95
         ------
            150
            133
          ------
              170
              152
            ------
```

180
171
———
90
76
———
140
133
———
70
57
———
130
114
———
160
152
———
80
76
———
40
38
———
20
19
———
1
———

వేదగణిత పద్ధతి (సమాధానాన్ని కుడినుండి ఎడమవైపు వ్రాసే పద్ధతి) **:-**

1. ఇచ్చిన సమస్య - 1/19
2. హారము = 19, లవము = 1
3. హారములో 9కి ముందు ఉన్న అంకె 1
4. దీనికంటే '1' ఎక్కువ అయిన సంఖ్య = 1+1=2
5. ఈ 2 ఇచ్చిన సమస్యకు ప్రాతిపదిక అవుతుంది.
6. ఫలితాన్ని (భాగఫలాన్ని) ఎడమనుండి కుడివైపుకుకాక, కుడినుండి ఎడమవైపుకు

వేసుకుంటూ వస్తాము. ఆ రకంగా ప్రారంభించి కుడివైపున చిట్టచివరన ‘1’ వేసుకోవాలి

ఇప్పటి స్థితి :- | **1** |

7. ఫలితంలో చివరన వేసిన ‘1’ని ప్రాతిపదికతో గుణించాలి. $1 \times 2 = 2$

8. దీనిని ఫలితంలో పూర్వం వేసిన ‘1’కి ఎడమవైపున వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి: | **2 1** |

9. ఇప్పుడు వచ్చిన ‘2’ని, ప్రాతిపదిక ‘2’తో గుణించాలి. $2 \times 2 = 4$

10. దీనిని ఫలితంలో పూర్వంవేసిన 2కి ఎడమవైపున వేసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి : | **4 2 1** |

11. ఇదే పద్ధతిలో ‘4’ని ప్రాతిపదిక (=2)తో గుణిస్తే ‘8’ వస్తుంది. దీనిని కూడ ఫలితంలో ఎడమవైపున వేసుకోవాలి. ఇంతవరకూ ‘ఒక అంకె’ సంఖ్యలే వచ్చేయి. (1,2,4,8)

12. కాని ‘8’ని ‘2’తో గుణిస్తే ‘16’ వస్తుంది. దానిని పై వరుసలో 6 గాను, క్రింద వరుసలో 1 గాను వ్రాసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి : | $_{1}\mathbf{6}$ **8 4 2 1** |

13. ఇప్పుడు ‘6’ని ప్రాతిపదిక ‘2’తో గుణించి క్రిందవరుసలో వేసిన ‘1’ ని కలపాలి.

$2 \times 6 = 12$

$12 + 1 = 13$

14. పైన చెప్పిన విధంగానే, ‘13’లోని ‘3’ని పైవరుసలో వ్రాసుకొని, ‘1’ని క్రింది వరుసలో వ్రాసుకోవాలి.

ఇప్పటి స్థితి : | $_{1}\mathbf{3}$ $_{1}\mathbf{6}$ **8 4 2 1** |

15. ఈ విధంగా వరుసగా గుణకారాలు చేసుకుంటూవెళితే ఫలితంలోని అంకెలు ఈక్రింది విధంగా వస్తూ ఉంటాయి.

1	7	${}_{1}1$
2	${}_{1}4$	3
4	9	6
8	${}_{1}8$	${}_{1}2$
${}_{1}6$	${}_{1}7$	5
${}_{1}3$	${}_{1}5$	${}_{1}0$

16. వరుస గుణకారాలను పైన చెప్పిన విధంగా చేసుకుంటూ పోతే, ఒకచోట ${}_{1}0$ వస్తుంది. అప్పుడు గుణకారాలు ఆపాలి. లేకపోతే, ఇంతకు ముందు వచ్చిన అంకెలే మళ్ళీమళ్ళీ అదే వరుసలో వస్తూ ఉంటాయి.

17. ఇంతవరకూ వచ్చిన పైవరుసలోని అంకెలను కుడినుండి ఎడమకు వ్రాసుకుంటూ వెళితే సమాధానం తయారవుతుంది.

ఫలితం (సమాధానం) :

0.0526 3157 8947368421

గమనిక1 :- భాగహారానికి, పాత పద్ధతిలో 'తీసివేతను', 'గుణకారాన్ని' మళ్ళీమళ్ళీ చేస్తూంటాము. కాని వైదిక గణిత పద్ధతిలో చిన్న అంకెలపై గుణకారాలను చేసి సులభంగా ఫలితాన్ని సాధిస్తాము.

గమనిక 2 :- ఇచ్చిన సమస్యలో హారము 19 ఉంది. వచ్చిన సమాధానంలో 18 అంకెలు ఉన్నాయి. ఈ 18 అంకెలు అదే వరుసలో వస్తూంటాయి.

ఉదాహరణ2 : 1/29 = ?

(సమాధానాన్ని కుడి నుండి ఎడమ వైపుకు వ్రాసే పద్ధతి)

1. ఇచ్చిన సమస్య = 1/29

2. హారము = 29, లవము = 1

3. హారములో 9 కి ముందు ఉన్న అంకె 2

4. ప్రాతిపదిక = 2+1=3

5. సమాధానంలో కుడివైపున చిట్టచివరన '1'ని వేసుకోవాలి.

6. దానిని ప్రాతిపదికతో గుణించాలి ఆ వచ్చిన అంకెను కూడా మళ్ళీ ప్రాతిపదికతో గుణించాలి. అప్పుడు వచ్చే సంఖ్యలు ఈక్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1	2^{1}	6
3	5	1^{8}
9	1^{5}	2^{5}
2^{7}	1^{6}	1^{7}
2^{3}	1^{9}	2^{2}
1^{1}	2^{8}	8
4	2^{6}	2^{4}
1^{2}	2^{0}	1^{4}
7	2	1^{3}
		1^{0}

7. ప్రాతిపదిక(=3)తో వరుస గుణకారాలతో వచ్చే అంకెలు వచ్చిన సంఖ్యలను వరసగా కుడినుండి ఎడమ వైపుకు వేసుకుంటూ వెళ్లాలి.

సమాధానం:

$$0.0344827586206896551724137931$$

గమనిక : ఇచ్చిన సమస్యలో హారము 29. వచ్చిన సమాధానంలో 28 అంకెలు ఉన్నాయి. ఈ 28 అంకెలు అదే వరుసలో వస్తూ ఉంటాయి.

18. భాగఫలంలోని అంకెలలో 'లయ' బద్ధత

'ఏకాధికేన పూర్వేణ' సూత్రంతో ఇంకో సౌలభ్యముంది. ఇంతకుముందు తీసుకొనిన ఉదాహరణలలో, 1/9 విలువ ను కనుక్కోవడానికి 18 సార్లు గుణకారాలు చేశాము. 1/29 విలువను కనుక్కోవడానికి 28 సార్లు గుణకారాలు చేశాము. కాని అన్నిసార్లు చేయనక్కరలేదు. వచ్చిన సమాధానంలోని అంకెలలో ఒక విధమైన **"లయ"** ఉంది.

ఉదాహరణ 1 :

1/19 కి సమాధానం ఈ క్రింది విధంగా వచ్చింది.

1/19 =0.05 26 315 78 94 73 68 421

2. ఈ సమాధానంలో 18 అంకెలు ఉన్నాయి. ఈ సమాధానాన్ని రెండు సగాలుగా చేసి (అంటే 18/2 = 9 అంకెల చొప్పున) చేసి ఒకదాని క్రింద ఒకటి వేసి చూడండి

3. తర్వాత రెండు వరుసలలోని అంకెలను కలపండి.

   0.05 26 31 578

     94 73 68 421

   ---

     99 99 99 999

4. ఆ రెండు వరుసలలోని సంఖ్యలను కూడితే అన్నీ 9 లు వస్తాయి. అందుచేత 18సార్లు చేయవలసిన అవసరం లేదు. క్రింద వరుస గుణకారాలను 9 సార్లు చేస్తే చాలు. పై వరుసలోని మిగతా తొమ్మిది అంకెలను సులభంగా చెప్పవచ్చు.

5. (వచ్చిన ఒక్కొక్క అంకెను 9లో నుండి తీసివేసుకుంటూపోతే రెండవ వరుసలోని అంకెలు వచ్చేస్తాయి.)

6. ఉదాహరణకు క్రింది వరుసలోని అంకెలు = 947368421

7. పై వరుసులోని అంకెలు :

   9-9 = 0   9-3 = 6   9-4 = 5

9−4 = 5	9−6 = 3	9−2 = 7
9−7 = 2	9−8 = 1	9−1 = 8

8. పై వరుసలోని అంకెల తర్వాత క్రింది వరుసలోని అంకెలను వేసుకుంటే మొత్తం సమాధానం వస్తుంది.

ఉదాహరణ 2 :

1. సమస్య 1/29= ?
2. ఈ సమస్యకు 28 అంకెలతో సమాధానం వస్తుందని మనం తెలుసుకున్నాము.
3. మొత్తం సమాధానాన్ని రెండు భాగాలు చేస్తే, ఒక్కొక్క భాగంలో 14 అంకెలు చొప్పున వస్తాయి.
4. పూర్వం వివరించిన పద్ధతిలో, 14 సార్లు వరుస గుణ కారాలతో సాధించగా వచ్చిన క్రింద వరుస ఇలా ఉంటుంది.
   క్రింద వరుస = 96551724137931
5. క్రింద వరుసలోని ప్రతీ అంకెను 9లో నుండి తీసి వేయగా పైవరుస 14 అంకెలు వస్తాయి.

9−9 = 0	9−4 = 5
9−6 = 3	9−1 = 8
9−5 = 4	9−3 = 6
9−5 = 4	9−7 = 2
9−1 = 8	9−9 = 0
9−7 = 2	9−3 = 6
9−2 = 7	9−1 = 8

పై వరుస = 03448275862068

పై వరుస క్రింది వరుస

సమాధానం =0.03448275862068 96551724137931

19. భాగహారములు-2 (ఏకాధికేనపూర్వేణ)

సూత్రం : ఏకాధికేనపూర్వేణ - ఎడమవైపు నుండి

గమనిక : సమాధానాన్ని ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు వ్రాయుపద్ధతి.

వివరణ : ఇంతవరకూ భాగహారాన్ని గుణకారపద్ధతిలో సాధించాము. ఇపుడు భాగహారాన్ని భాగహారపద్ధతిలో ఎలా సులభంగా సాధించవచ్చో చూద్దాము.

ఉదాహరణ1 :

1. సమస్య 1/19 = ?
2. '9' కి ముందున్న అంకె = 1
3. ప్రాతిపదిక = 1+1 = 2
4. లవంలోని '1'ని '2'తో భాగించాలి.
5. భాగఫలం = 0, శేషం = 1 వస్తాయి.
6. వీటిని ఈ క్రింది విధంగా వేసుకోవాలి

$${}_{1}0$$

7. పైన వచ్చిన '1'ని, '0'ని ప్రక్కప్రక్కన పెడితే 10 తయారుఅవుతుంది. ఈ '10'ని '2'తో భాగిస్తే 5 సార్లు పోతుంది. శేషం '0' వస్తుంది.
8. ఫలితం యొక్క ఇప్పటి స్థితిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాసుకోవాలి.

$${}_{1}05$$

9. ఇపుడు వచ్చిన '5'ని ప్రాతిపదిక (=2) తో భాగిస్తే ఫలం 2, శేషం 1 వస్తాయి.ఫలితం యొక్క ఇప్పటిస్థితి

$${}_{1}05\ {}_{1}2$$

10. పైన వచ్చిన శేషాన్ని ఫలాన్ని కలిపి వ్రాస్తే 12 వస్తుంది. దానిని ప్రాతిపదిక (=2)తో భాగిస్తే ఫలం 6, శేషం 0 వస్తుంది.

ఇప్పటిస్థితి

$${}_{1}05\ {}_{1}2\ 6$$

11. ఈ విధంగా9 సార్లు చేసుకొంటూపోతే మధ్యలో ఫలితం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$_{1}05 \quad _{1}2 \quad 6 \quad 3 \quad _{1}1 \quad _{1}5 \quad _{1}7 \quad _{1}8$

12. 1/19 భిన్నానికి వచ్చే సమాధానంలోని అంకెలలో ఒక 'లయ' బద్ధత ఉందని తెలుసుకున్నాము. అందుచేత ఈ అంకెలనన్నింటినీ 9లలో నుండి తీసివేయాలి. అపుడు రెండవ సగభాగానికి చెందిన అంకెలువస్తాయి.

999 999 999

052 631 578

947 368 421

13. ఇప్పుడు మొదటి, రెండు భాగాలలోని అంకెలను వరుసగా వేస్తే 19 కి భాగఫలం వస్తుంది.

సమాధానం = 0.052631578947368421

ఇలాగే మిగిలిన భిన్నాలకు కూడా వాడుకోవచ్చును.

20. భాగహారములు-3 (నిఖిలం)

సూత్రం : నిఖిలం నవతః చరమం దశతః

అర్థం : అన్నీ తొమ్మిది నుండి, ఆఖరిది పదినుండి

వివరణ : ఈ సూత్రాన్ని గుణకారాలలో వాడడం జరిగింది. దీనిని భాగహారాలలో ఎట్లా వాడవచ్చో ఇప్పుడు చూద్దాం.

భాగహారంలో వచ్చే పారిభాషిక పదాలు, సాధించవల సింది భాగహారం చేయడానికి విభాజ్యం (Dividend), విభాజకం (Divisor) ఇస్తారు. భాగఫలాన్ని (Quotient), శేషాన్ని (Reminder) కనుక్కోవాలి.

భాగహారంలో జరిగేది ఏమిటి?

1. విభాజ్యంలో నుండి విభాజకాన్ని చాలాసార్లు తీసి వేయడమే భాగహారం. ఎన్నిసార్లు పూర్తిగా తీసివేయడానికి వీలవుతుందో చెప్పేదానిని **భాగఫలం** అంటారు.

2. ఆఖరుసారి తీసివేతలో విభాజ్యంలో మిగిలిన భాగాన్ని **శేషం** అంటారు.

3. విభాజకంలో ఉన్న అంకెలను బట్టి శేషంలోని అంకెలు నిర్ణయమౌతాయి. ఉదాహరణకు విభాజకంలో ఒక అంకె మాత్రమే ఉంటే, శేషంలో కూడా ఒక అంకె మాత్రమే ఉంటుంది.

వైదిక పద్ధతి విశిష్టత

భాగహారం ఎట్లా చేయాలో చిన్నప్పుడే పాఠశాలల్లో నేర్పు తారు. ఇది అందరికీ తెలిసిందే.

కాని, విభాజ్యంలో నుండి విభాజకాన్ని తీసివేసే బదులు, విభాజకం యొక్క నిఖిలాన్ని కలుపుకుంటూ వెళ్ళడం వైదిక పద్ధతి విశిష్టత. అందరికీ అనుభవంలో ఉన్న విషయం - తీసివేతకంటే కూడిక సులభం అని. అందుకు నిఖిలం పద్ధతి తేలిక అనిపిస్తుంది.

నిఖిలం పద్ధతిలో భాగహారాన్ని చేసే విధానం :

1. మొదట విభాజ్యాన్ని, విభాజకాన్ని గుర్తించాలి.

2. విభాజకం యొక్క నిఖిలాన్ని కనుక్కోవాలి.

(ఒక సంఖ్యకు, దానికంటె పెద్దదైన దశాంశ సంఖ్యకు గల భేదాన్ని నిఖిలం అంటారు. ఉదాహరణకు

6 కు నిఖిలం = 10-6 = 4

9 కి నిఖిలం = 10-9 = 1

3. విభాజ్యంలోని మొదటి అంకెను (ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి) నిఖిలంతో గుణించాలి.

4. వచ్చిన విలువను, విభాజ్యంలోని తర్వాత అంకె క్రింద వ్రాసుకొని, కూడిక చేయాలి. ఇప్పటికి భాగహారం ఒకస్థానం జరిగినట్లు అవుతుంది.

5. పైన కూడగా వచ్చిన విలువతో నిఖిలాన్ని గుణించి, విభాజ్యంలోని తర్వాత స్థానంలో ఉన్న అంకె క్రింద వ్రాసుకొని కూడాలి. ఇప్పటికి భాగహారం కుడివైపుకు ఇంకొకస్థానం జరిగినట్లు అవుతుంది.

6. ఈ విధంగా విభాజ్యంలోని అన్ని అంకెలు పూర్తయ్యే వరకు ఆవృత్తి (Repeat) చేసుకుంటూపోవాలి.

7. ఇట్లా చేసుకుంటూ పోతూ ఉంటే ఆఖరుకు వచ్చే సమాధానంలో భాగఫలం, శేషం రెండూ ఉంటాయి.

8. విభాజకంలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటే శేషంలో కూడా అన్ని అంకెలు ఉండడానికి వీలుంది కనుక, పైన వచ్చిన సమాధానంలో కుడివైపున ఉన్న అన్ని అంకెలను వేరుచేయాలి. అది శేషం అవుతుంది.

9. సమాధానంలో మిగిలిన అంకెలు భాగఫలాన్ని సూచిస్తాయి.

ఉదాహరణ1 : 23/9 = ?

వివరణ :

1. ఇచ్చిన ప్రశ్నలో విభాజ్యం = 23
2. విభాజకం = 9
3. విభాజకం యొక్క నిఖిలం = 10−9 = 1
4. ఈ సంఖ్యలను ఈ విధంగా వేసుకుంటారు.

← **విభాజ్యం** →

		భాగఫల స్థానం	**శేషం స్థానం**
విభాజకం	**9**	**2**	**3**
నిఖిలం	**1**		

5. విభాజ్యంలో మొదటి అంకె (ఎడమవైపు నుండి) = 2
6. దీనిని (2ని) నిఖిలంతో (1తో) గుణించాలి. విలువ = 2×1 = 2

7. ఈ విలువను (2ను) విభాజ్యంలో తర్వాత అంకె క్రింద (3 క్రింద) వ్రాసుకొని కూడిక చేయాలి.

2+3 = 5

8. సమాధానం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

9	**2**	**3**
1		**2**
	2	**5**

9. శేషంలో ఉండే అంకెల సంఖ్య = విభాజకంలో ఉన్న అంకెల సంఖ్య = 1

10. శేషం = సమాధానంలో కుడివైపున ఉన్న అంకె = 5

11. భాగఫలం = Q = 2

శేషం = R = 5

ఉదాహరణ 2 : 52/9 = ?

వివరణ :

1. ఇచ్చిన ప్రశ్నలో విభాజ్యం = 52
2. విభాజకం = 9
3. నిఖిలం = 10−9 = 1
4. ఇప్పటి సంఖ్యల స్థితి :

9	**5**	**2**
1		

5. విభాజ్యంలో మొదటి అంకె (ఎడమవైపు నుండి) = 5
6. దీనిని (5ను), నిఖిలంతో (1తో) గుణించాలి. విలువ = 5×1 = 5
7. ఈ విలువను (5ను) విభాజ్యంలో తర్వాతి అంకె క్రింద (2 క్రింద) వ్రాసుకుని కూడిక చేయాలి.

5+2 = 7

8. **ఇప్పటి స్థితి :**

9	**5**	**2**
1		**5**
	5	**7**

9. భాగఫలం = Q = 5.   శేషం = R = 7

ఉదాహరణ 3 : 125/9 = ?

1. విభాజ్యం = 125.
2. విభాజకం = 9
3. నిఖిలం = 10–9 = 1
4. ఇప్పటి స్థితి :

9	**12**	**5**
1		

5. విభాజ్యంలో మొదటి అంకె (ఎడమ నుండి) = 1
6. దీనిని నిఖిలంతో గుణించాలి. విలువ = 1×1 = 1
7. దీనిని విభాజ్యంలోని తర్వాత అంకె క్రింద (2 క్రింద)వ్రాసుకుని కూడిక చేయాలి.

   : 1+2 = 3

8. ఇప్పటి స్థితి :

9	**12**	**5**
1	**1**	
	13	**5**

9. చివరగా వచ్చిన విలువ (3)తో నిఖిలాన్ని గుణించాలి.   3×1 = 3
10. దీనిని విభాజ్యంలో తర్వాతి అంకె (5) క్రింద వ్రాసుకొని కూడిక చేయాలి.

    3+5 = 8

11. ఇప్పటి స్థితి :

9	**12**	**5**
1	**1**	
	13	**5**
		3
	13	**8**

శేషం = R = 8

భాగఫలం = 13

21. భాగహారములు-4 (విలోకనమ్)

సూత్రం : విలోకనమ్

అర్థం : పరిశీలనగా చూచుట

వివరణ : కొన్ని సందర్భాల్లో ఇచ్చిన విభాజ్యాన్ని, విభాజకాన్ని పరిశీలించగానే భాగఫలాన్ని, శేషాన్ని చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు 12ని 9తో భాగించవలసి ఉన్నపుడు, భాగఫలం '1' అని, శేషం '3' అని చెప్పవచ్చు.

గమనిక : 'నిఖిలం' సూత్రంతో భాగహారాన్ని చేసేటప్పుడు, శేషం స్థానంలో విభాజకం కంటే పెద్దవిలువ ఉన్న సంఖ్య చేరినట్లయితే, అప్పుడు 'విలోకనం' సూత్రాన్ని వినియోగించాలి.

ఉదాహరణ 1 : 2514 / 9=?

వివరణ :

1. విభాజ్యం = 2514
2. విభాజకం = 9
3. నిఖిలం = 10−9 = 1
4. విభాజ్యంలోని మొదటి అంకె = 2
5. పై అంకెను నిఖిలంతో గుణించాలి. విలువ = 2×1 = 2
6. దీనిని విభాజ్యంలోని తర్వాత అంకె క్రింద (5 క్రింద) వ్రాసుకొని కూడిక చేయాలి. 2+5 = 7
7. ఇప్పటి స్థితి :

9	**2 5 1**	**4**
1	**2**	
	2 7 1	**4**

8. చివరగా వచ్చిన విలువ (7) తో నిఖిలాన్ని గుణించాలి 7×1 = 7
9. దీనిని విభాజ్యంలో తర్వాతి అంకె (1) క్రింద వ్రాసుకొని కూడాలి. 1+7 = 8

10. ఇప్పటి స్థితి :

9	**2 5 1**	**4**
1	**2**	
	2 7 1	**4**
	7	
	2 7 8	**4**

11. చివరగా వచ్చిన (8) తో నిఖిలాన్ని గుణించాలి 8×1 = 8
12. దీనిని విభాజ్యంలో తర్వాతి అంకె (4) క్రింద వ్రాసుకొని కూడిక చేయాలి.

4+8 = 12

9	**2 5 1**	**4**
1	**2**	
	2 7 1	**4**
	7	
	2 7 8	**4**
		8
	2 7 8	**12**

13. ఇపుడు వచ్చిన 12 శేషం స్థానంలో వేయాలి. కాని శేషంస్థానంలో ఒక్క అంకె మాత్రమే ఉండటానికి అవకాశం ఉంది. మరియు, 'శేషం' విభాజకం కంటే కూడ ఎక్కువగా ఉంది. అందుచే 'విలోకనం' సూత్రాన్ని వినియోగించాలి.
14. 12/9కి 'విలోకనం' ద్వారా భాగఫలం = 1, శేషం = 3 వస్తాయి. వానిని ఈ క్రింది విధంగా వేసుకోవాలి.
15. ఇప్పటి స్థితి :

9	**2 5 1**	**4**
1	**2**	
	2 7 1	**4**
	7	
	2 7 8	**4**
		8
	2 7 8	**12**
	1	**3**
	2 7 9	**3**

భాగఫలం = Q = 279

శేషం = R = 3

ఉదాహరణ2 : 154/7 = ?

వివరణ :

1. విభాజ్యం = 154
2. విభాజకం = 7
3. నిఖిలం = 10–7 = 3

4. విభాజ్యంలో మొదటి అంకె × నిఖిలం = 1×3 = 3

5. దీనిని విభాజ్యంలోని తర్వాత అంకె (5 క్రింద) వ్రాసుకొని కూడిక చేయాలి.
   3+5=8

6. ఇప్పటి స్థితి :

7	**1 5**	**4**
3	**3**	
	1 8	**4**

7. ఇంతకుముందు ఇచ్చిన ఉదాహరణల పద్ధతిలో చేస్తే చివరకు స్థితి :

7	**1 5**	**4**
3	**3**	
	1 8	**4**
		24
	1 8	**28**

7. విలోకనం సూత్రం ప్రకారం, 28/7 సమస్యకు

   భాగఫలం = 4

   శేషం = 0

7	**1 5**	**4**
3	**3**	
	1 8	**4**
		24
	1 8	**28**
	4	**0**
	2 2	**0**

8. భాగఫలం = Q = 22

   శేషం = R = 0

ఉదాహరణ3 : 123/99 = ?

వివరణ :

1. విభాజ్యము = 123
2. విభాజకము = 99
3. నిఖిలం = 100−99 = 1
4. విభాజ్యంలోని మొదటి అంకె × నిఖిలం = 1×1=1
5. శేషంలో రాగల అంకెలు = విభాజకంలోని అంకెల సంఖ్య = 2

6. ఇంతకు ముందు ఇచ్చిన ఉదాహరణల పద్ధతిలో చేస్తే సమాధానం=

99	**1**	**2 3**
01		
		0 1
	1	**2 4**

Q = 1 R = 24

ఉదాహరణ4 : 425/98 = ?

వివరణ :

1. విభాజ్యము = 425 2. విభాజకము = 98

3. నిఖిలం = 100–98 = 2

4. ఇంతకుముందు ఇచ్చిన ఉదాహరణల పద్ధతిలో చేస్తే సమాధానము:

98	**4 2 5**
02	**0 8**
	4 3 3

Q = 4 R = 33

ఉదాహరణ5 : 2159/89 = ?

వివరణ :

1. విభాజ్యము = 2159 2. విభాజకము = 89

3. నిఖిలం = 11

4. సమాధానం :

89	**2 1**	**5 9**
11	**2**	**2**
	2 3	**7 9**
		3 3
	2 3	**1 1 2**

ఇక్కడ శేషం విభాజకం కంటె ఎక్కువగా ఉంది. కనుక 'విలోకనం' సూత్ర ప్రకారం 112/89 సమస్యకు భాగఫలం = 1, శేషం = 23.

89	2 1	5 9
11	2	2
	2 3	7 9
		3 3
	2 3	11 2
	1	2 3
	2 4	2 3

Q = 24 R = 23

ఉదాహరణ6 : 4234/889 = ?

వివరణ :

1. ఇక్కడ నిఖిలం = 1000−889 = 111
2. శేషంలో మూడు అంకెలు రావచ్చు, (విభాజకంలో మూడు అంకెలు ఉన్నాయి.)
3. సమాధానం :

889	4	2 3 4
111		4 4 4
	4	6 7 8

Q = 4 R = 678

ఉదాహరణ7 : 1157/876 = ?

వివరణ :

1. ఇక్కడ నిఖిలం = 1000−876 = 124
2. శేషంలో మూడు అంకెలు రావచ్చు.
3. సమాధానం :

876	1	1 5 7
124		1 2 4
	1	2 8 1

Q = 1 R = 281

22. గుణకారములు–10 (కర్ణ పద్ధతి)

విషయం : కర్ణ పద్ధతి

వివరణ :

1. రెండు సంఖ్యలతో చేసే గుణకారాలను కర్ణపద్ధతి (ఏటవాలు పద్ధతి) తో సులభముగా చేయవచ్చును.
2. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయో, అన్ని నిలువు గడులను (Vertical Columns) వ్రాయవలెను. ఆ సంఖ్యలోని అంకెలను ఆ గడులపైన వ్రాయవలెను.
3. ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలు ఉంటాయో, అన్ని అడ్డ వరుసలను (Rows) వ్రాయవలెను. ఆ సంఖ్యలోని అంకెలను ఆ వరుసలలో వ్రాయవలెను.
4. అప్పుడు ఒక గళ్ళ నుడికట్టు ఏర్పడినట్లు అగును. ఈ గళ్ళలోని మూలలను కలుపుచూ కర్ణములను వ్రాయవలెను.
5. నిలువు, అడ్డ వరుసలలోని అంకెలను గుణించగా వచ్చిన లబ్ధములలోని అంకెలను గళ్ళలోని కర్ణములకు రెండువైపులా వేయవలెను.
6. అన్ని అంకెల యొక్క గుణకారములు పూర్తి అయిన తరువాత, రెండేసి కర్ణముల మధ్య ఉన్న అంకెలను కలుపుచూ ఫలితములోని అంకెలను సాధించవలెను.

ఉదాహరణ 1 : $9 \times 5 = ?$

1. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య = 9

ఈ సంఖ్యలో ఒక అంకె మాత్రమే ఉన్నది. అందుచే ఒక గడి వ్రాయవలెను. దానిపైన 9 అనే అంకెను వ్రాయవలెను.

2. ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య = 5

ఈ సంఖ్యలో ఒక అంకె మాత్రమే ఉన్నది. అందుచే ఒక వరుస మాత్రమే వ్రాయవలెను. దాని ప్రక్కన 5 అనే అంకెను వ్రాయవలెను.

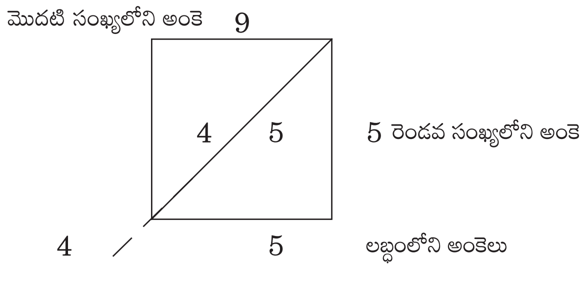
3. మొత్తం మీద ఒక్క వరుస మాత్రమే ఉండును. ఆ వరుసలో ఒక గడి మాత్రమే

ఉండును. దానిలోని మూలలను కలుపుచూ ఒక కర్ణమును వ్రాయవలెను.

4. 9ని 5తో గుణించగా 45 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(45)లోని 4ను కర్ణమునకు ఒక వైపున, 5ను కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

5. ఈ లెక్కలో ఒక్క కర్ణము మాత్రమే వ్రాయబడింది. ఆ కర్ణమును అనుసరించి ఉన్న అంకెలను కలిపి క్రింద వ్రాసుకొనగా 45 అనే సంఖ్య మాత్రమే వచ్చును.

6. సమాధానం (కర్ణపద్ధతిలో) : 9×5=45



ఉదాహరణ 2 : 78×6=?

1. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య = 78

ఈ సంఖ్యలో రెండు అంకెలు ఉన్నవి. అందుచే రెండు గడులను వ్రాయవలెను. వానిపైన 7, 8 అనే అంకెలను వ్రాయవలెను.

2. ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య = 6

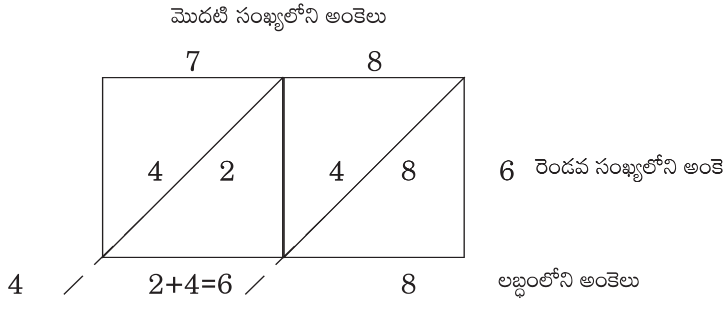
ఈ సంఖ్యలో ఒక అంకె మాత్రమే ఉన్నది. అందుచే ఒక వరుస మాత్రమే వ్రాయవలెను. దాని ప్రక్కన 6 అనే అంకెను క్రింది పటములో చూపించిన విధముగా వ్రాయవలెను.

3. మొత్తం మీద ఒక్క వరుస మాత్రమే ఉండును. ఆ వరుసలో రెండు గడులు మాత్రమే ఉండును. దానిలోని మూలలను కలుపుచూ కర్ణములను వ్రాయవలెను.

4. 78 లోని 7ను 6తో గుణించగా 42 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(42)లోని 4ను ఆ గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 2ను అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

5. 78 లోని 8ని 6తో గుణించగా 48 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(48)లోని 4ను ఆ

గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 8ని అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.
5. ఈ లెక్కలో రెండు కర్ణములు వ్రాయబడినవి. ఆ కర్ణములను అనుసరించి ఉన్న అంకెలను కలిపి క్రింద వ్రాసుకొనగా 4, 6, 8 అనే సంఖ్యలు వచ్చును.
6. వాటిని ఈ క్రింద చూపించడం జరిగింది.



7. సమాధానం (కర్ణపద్ధతిలో) : 78×6=468

ఉదాహరణ 3 : 69×34=?

1. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య = 69

ఈ సంఖ్యలో రెండు అంకెలు ఉన్నవి. అందుచే రెండు గడులను వ్రాయవలెను. వానిపైన 6, 9 అనే అంకెలను వ్రాయవలెను.

2. ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య = 34

ఈ సంఖ్యలో రెండు అంకెలు ఉన్నవి. అందుచే రెండు వరుసలను వ్రాయవలెను. వాని ప్రక్కన 3, 4 అనే అంకెలను క్రింది పటములో చూపించిన విధముగా వ్రాయవలెను.

3. మొత్తం మీద రెండు వరుసలు ఉండును. ఒక్కొక్క వరుసలో రెండు గడులు ఉండును. వానిలోని మూలలను కలుపుచూ కర్ణములను వ్రాయవలెను.

4. 69 లోని 6ను 3తో గుణించగా 18 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(18)లోని 1ని ఆ గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 8ని అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

5. 69 లోని 6ను 4తో గుణించగా 24 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(24)లోని 2ను ఆ

గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 4ను అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

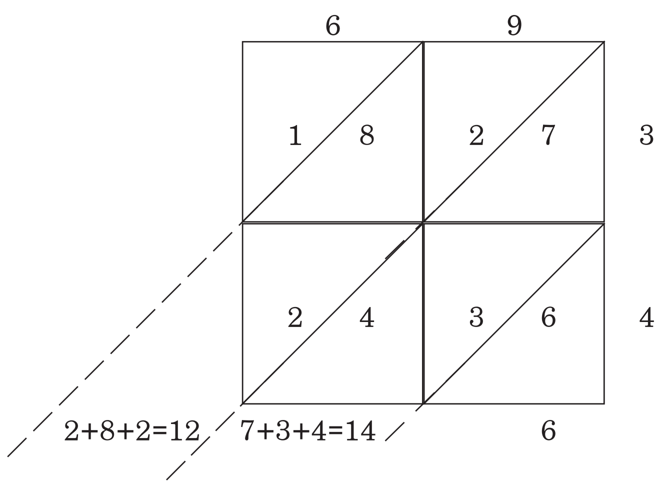
6. 69 లోని 9ని 3తో గుణించగా 27 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(27)లోని 2ను ఆ గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 7ను అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

7. 69 లోని 9ని 4తో గుణించగా 36 వచ్చును. ఈ సంఖ్య(36)లోని 3ను ఆ గడిలోని కర్ణమునకు ఒక వైపున, 6ను అదే కర్ణమునకు వేరొక వైపున వ్రాయవలెను.

8. ఈ లెక్కలో మూడు కర్ణములు వ్రాయబడినవి. ఆ కర్ణములను అనుసరించి ఉన్న అంకెలను కలిపి, క్రింద వ్రాసుకొనగా 1, 12, 14, 6 అనే సంఖ్యలు వచ్చును.

9. ఒక్కొక్క స్థానంలో ఒక్కొక్క అంకె మాత్రమే అనుమతించబడును గనుక, పైన వచ్చిన రెండంకెల సంఖ్యలలోని పదుల స్థానంలోని అంకెను దాని ఎడమ ప్రక్కన ఉన్న సంఖ్యకు కలుపవలెను. ఈ విధంగా అన్ని సంఖ్యలను సమన్వయం (Carry forward) చేసుకొనవలెను.

10. వాటిని ఈ క్రింద చూపించడం జరిగింది.



1	12+1=13	4	6
1+1=2	3	4	6
2	3	4	6

11. సమాధానం (కర్ణపద్ధతిలో) : 69×34=2346

ఉదాహరణ 4 : 945×476=?

1. ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య = 945

ఈ సంఖ్యలో మూడు అంకెలు ఉన్నవి. అందుచే మూడు గడులను వ్రాయవలెను. వానిపైన 9, 4, 5 అనే అంకెలను వ్రాయవలెను.

2. ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య = 476

ఈ సంఖ్యలో మూడు అంకెలు ఉన్నవి. అందుచే మూడు వరుసలను వ్రాయవలెను. వాని ప్రక్కన 4, 7, 6 అనే అంకెలను క్రింది పటములో చూపించిన విధముగా వ్రాయవలెను.

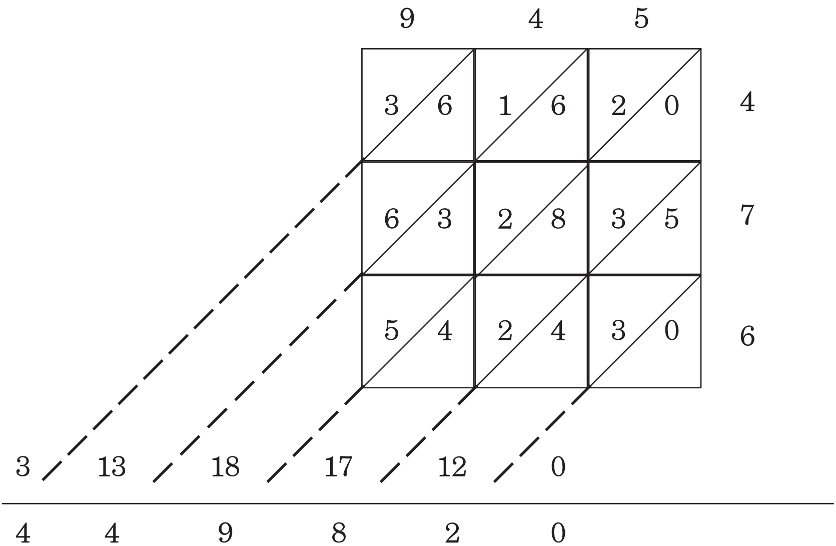
3. మొత్తం మీద మూడు వరుసలు ఉండును. ఒక్కొక్క వరుసలో మూడు గడులు ఉండును. వానిలోని మూలలను కలుపుచూ కర్ణములను వ్రాయవలెను.

4. 945 లోని 9, 4, 5 అంకెలను 476 లోని 4, 7, 6 అంకెలతో గుణించగా వచ్చిన సంఖ్యలను ఆయా గడులలో కర్ణములకు రెండు వైపులా సరిగా వ్రాయవలెను.

8. ఈ పటములోని కర్ణములను అనుసరించి ఉన్న అంకెలను కలిపి, క్రింద వ్రాసుకొనవలెను.

9. ఒక్కొక్క స్థానంలో ఒక్కొక్క అంకె మాత్రమే అనుమతించబడును గనుక, పైన ఇచ్చిన సంఖ్యలలోని అంకెలను గుణించగా రెండంకెల సంఖ్యలు వచ్చినపుడు ఆ సంఖ్యలలోని పదుల స్థానంలోని అంకెను దాని ఎడమ ప్రక్కన ఉన్న సంఖ్యకు కలుపవలెను. ఈ విధంగా అన్ని సంఖ్యలను సమన్వయం (Carry forward) చేసుకొనవలెను.

10. వాటిని ఈ క్రింద చూపించడం జరిగింది.



11. సమాధానం (కర్ణపద్ధతిలో) : 945×476=449820

గమనిక :

పైన వివరించిన విధముగా పెద్ద సంఖ్యలతో గుణకారములను కూడ కర్ణ పద్ధతిలో సాధించ వచ్చును.

భాగం-3

23. వేదాలలో దశాంశ విధానం

విషయం : వేదాలలో ఉన్న దశాంశ విధానమును ఉదాహరణలతో చూపించుట

వివరణ :

ఆధునిక శాస్త్రాలన్నిటికి మకుటాయమానమైనది గణితశాస్త్రం. గణితము యొక్క ప్రాధాన్యతను భారతీయ మహర్షులు అనాదికాలంలోనే గుర్తించారు. ఈ విషయాన్ని క్రీ.పూర్వం 1500 సంవత్సరాల ప్రాంతంలో లగధుడు అనే భారతీయ ఖగోళ శాస్త్రజ్ఞుడు తన వేదాంగ జ్యోతిషం అనే గ్రంథంలో ఈ విధంగా వ్రాశాడు.

యథాశిఖా మయూరాణాం నాగానాం మణయో యథా ।
తద్వద్వేదాంగ శాస్త్రాణాం గణితం మూర్ధని స్థితమ్ ॥

తా॥ నెమలికి శిరస్సుపై ఉండే శిఖ (మకుటం) వలె, నాగేంద్రుని శిరస్సుపైన ఉండే మణివలె, వేదాంగ శాస్త్రములన్నిటికి గణితము శిరస్థానీయము అయినది.

గణితశాస్త్రం విషయంలో భారతదేశము యొక్క అపూర్వమైన సేవలు ప్రపంచమంతటా గుర్తింపుపొందాయి. సున్న యొక్క తత్వం, మరియు స్థానాలకు విలువలు ఇచ్చిన దశాంశ విధానం భారతదేశ సేవలన్నిటిలోకి అత్యున్నత స్థానంలో పేరు పొందాయి. వేదములలోని అనేక భాగములలో చిన్న చిన్న సంఖ్యలు లగాయితు చాలా పెద్దవైన సంఖ్యల వరకూ ప్రస్తావించబడ్డాయి. వాటిని ఈ క్రింద ఉదాహరణ పూర్వకంగా చూపించడం జరిగింది.

శుక్ల యజుర్వేదంలో దశాంశ విధానం :

ఉదాహరణ 1 :

వివరణ : 1 లగాయితు లక్షకోట్ల (10^{12}) వరకు వినియోగించిన సంఖ్యలు ఈ క్రింది మంత్రంలో కనిపిస్తాయి.

ఏకా చ దశ చ దశ చ శతం చ
శతం చ సహస్రం చ సహస్రంచాయుతం చాయుతం చ నియుతం చ
నియుతం చ ప్రయుతంచార్బుదం చ న్యర్బుదం చ
సముద్రశ్చ మధ్యంచాంతశ్చ పరార్ధః ।

(1, 10), (10, 100),

(100, 1000), (1000, 10000), (10000, 100000 ($=10^5$)),

10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}
(వాజసనేయ సంహిత 17.2)

ఉదాహరణ 2 :

వివరణ : 1 నుండి 33 వరకు 2తో పెరుగుతున్న సంఖ్యలను, 4 నుండి 48 వరకు 4తో పెరుగుతున్న సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న మంత్రం ఈ క్రింద ఇవ్వబడింది.

ఏకా చ మే తిస్రశ్చ మే	(1, 3)
తిస్రశ్చ మే పంచ చ మే	(3, 5)
పంచ చ మే సప్త చ మే	(5, 7)
సప్త చ మే నవ చ మే	(7, 9)
నవ చ మ ఏకాదశ చ మే	(9, 11)
ఏకాదశ చ మే త్రయోదశ చ మే	(11, 13)
త్రయోదశ చ మే పంచదశ చ మే	(13, 15)

పంచదశ చ మే సప్తదశ చ మే	(15, 17)
సప్తదశ చ మే నవదశ చ మే	(17, 19)
నవదశ చ మ ఏకవిగ్ంశతిశ్చ మే	(19, 21)
ఏకవిగ్ంశతిశ్చ మే త్రయోవిగ్ంశతిశ్చ మే	(21, 23)
త్రయోవిగ్ంశతిశ్చ మే పంచవిగ్ంశతిశ్చ మే	(23, 25)
పంచవిగ్ంశతిశ్చ మే సప్తవిగ్ంశతిశ్చ మే	(25, 27)
సప్తవిగ్ంశతిశ్చ మే నవవిగ్ంశతిశ్చ మే	(27, 29)
నవవిగ్ంశతిశ్చ మ ఏకత్రిగ్ంశచ్చ మే	(29, 31)
ఏకత్రిగ్ంశచ్చ మే త్రయస్త్రిగ్ంశచ్చ మే	(31, 33)
యజ్ఞేన కల్పంతామ్	

చతస్రశ్చ మేష్టౌ చ మే	(4,8)
అష్టౌ చ మే ద్వాదశ చ మే	(8,12)
ద్వాదశ చ మే షోడశ చ మే	(12,16)
షోడశ చ మే విగ్ంశతిశ్చ మే	(16,20)
విగ్ంశతిశ్చ మే చతుర్విగ్ంశతిశ్చ మే	(20,24)
చతుర్విగ్ంశతిశ్చ మేష్టావిగ్ంశతిశ్చ మే	(24,28)
అష్టావిగ్ంశతిశ్చ మే ద్వాత్రిగ్ంశచ్చ మే	(28,32)
ద్వాత్రిగ్ంశచ్చ మే షట్త్రిగ్ంశచ్చ మే	(32,36)
షట్త్రిగ్ంశచ్చ మే చత్వారిగ్ంశచ్చ మే	(36,40)
చత్వారిగ్ంశచ్చ మే చతుశ్చత్వారిగ్ంశచ్చ మే	(40,44)
చతుశ్చత్వారిగ్ంశచ్చ మేష్టాచత్వారిగ్ంశచ్చ మే	(44,48)
యజ్ఞేన కల్పంతామ్	

(వాజసనేయ సంహిత, 18)

కృష్ణ యజుర్వేదం(తైత్తిరీయ శాఖ) లో దశాంశ విధానం :

ఉదాహరణ 3 :

వివరణ : గణితశాస్త్రంలోని శ్రేఢులకు సంబంధించిన సంఖ్యలను కలిగిఉన్న మంత్రం 4వ కాండలో 7వ పన్నంలో 11వ అనువాకంలో ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

ఏకా చ మే తిస్రశ్చ మే పంచ చ మే సప్త చ మే నవ చ మ ఏకాదశ చ మే త్రయోదశ చ మే పంచదశ చ మే సప్తదశ చ మే నవదశ చ మ ఏకవిగ్ంశతిశ్చ మే త్రయోవిగ్ంశతిశ్చ మే పంచవిగ్ంశతిశ్చ మే సప్తవిగ్ంశతిశ్చ మే నవవిగ్ంశతిశ్చ మ ఏకత్రిగ్ంశచ్చ మే త్రయస్త్రిగ్ం శచ్చ మే చతస్రశ్చ మేఽ ష్టౌ చ మే ద్వాదశ చ మే షోడశ చ మే విగ్ంశతిశ్చ మే చతుర్విగ్ంశతిశ్చ మేఽ ష్టావిగ్ంశతిశ్చ మే ద్వాత్రిగ్ంశచ్చ మే షట్త్రిగ్ంశచ్చ మే చత్వారిగ్ంశచ్చ మే చతుశ్చత్వారిగ్ంశచ్చ మేఽ ష్టాచత్వారిగ్ంశచ్చ మే ।

1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33

4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48 (తైత్తిరీయ సంహిత 4-7-11)

ఉదాహరణ 4 :

వివరణ : కృష్ణ యజుర్వేదంలో తైత్తిరీయ శాఖలో 7వ కాండలో రెండవ పన్నంలో చాలా భాగం రకరకాల వ్యాప్తి గలిగిన సంఖ్యల వివరాలు పుష్కలంగా ఉన్నాయి. అందులో కొన్ని మంత్రాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

ఏకస్మై స్వాహా ద్వాభ్యాగ్ం స్వాహా త్రిభ్యః స్వాహా చతుర్భ్యః స్వాహా పఞ్చభ్యః స్వాహా షడ్భ్యః స్వాహా సప్తభ్యః స్వాహాఽ ష్టాభ్యః స్వాహా నవభ్యః స్వాహా దశభ్యః స్వాహైకాదశభ్యః స్వాహా ద్వాదశభ్యః స్వాహా త్రయోదశభ్యః స్వాహా చతుర్దశభ్యః స్వాహా పఞ్చదశభ్యః స్వాహా షోడశభ్యః స్వాహా సప్తదశభ్యః స్వాహాఽ ష్టాదశభ్యః స్వాహైకాన్న విగ్ంశత్యై స్వాహా నవవిగ్ంశత్యై స్వాహైకాన్న చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా నవ చత్వారిగ్ంశతే

స్వాహైకాన్న షష్ట్యై స్వాహా నవషష్ట్యై స్వాహైకాన్నాశీత్యై స్వాహా నవాశీత్యై స్వాహైకాన్న శతాయ స్వాహా శతాయ స్వాహా ద్వాభ్యాగ్ం శతాభ్యాగ్ంస్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 100, 200 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.11)

ఉదాహరణ 5 :

ఏకస్మై స్వాహా త్రిభ్యః స్వాహా పఞ్చభ్యః స్వాహా సప్తభ్యః స్వాహా నవభ్యః స్వాహైకాదశభ్యః స్వాహా త్రయోదశభ్యః స్వాహా పఞ్చదశభ్యః స్వాహా సప్తదశభ్యః స్వాహైకాన్నవిగ్ంశత్యై స్వాహా నవవిగ్ంశత్యై స్వాహైకాన్న చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా నవచత్వారిగ్ంశతే స్వాహైకాన్నషష్ట్యై స్వాహా నవషష్ట్యై స్వాహైకాన్నాశీత్యై స్వాహా నవాశీత్యై స్వాహైకాన్న శతాయ స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.12)

ఉదాహరణ 6 :

ద్వాభ్యాగ్ం స్వాహా చతుర్భ్య స్వాహా షడ్భ్యః స్వాహా ఉష్టాభ్యః స్వాహా దశభ్యః స్వాహా ద్వాదశభ్యః స్వాహా చతుర్దశభ్యః స్వాహా షోడశభ్యః స్వాహా ఉష్టాదశభ్యః స్వాహా విగ్ంశత్యై స్వాహా ఉష్టానవత్యై స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 98, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.13)

ఉదాహరణ 7 :

త్రిభ్యః స్వాహా పఞ్చభ్యః స్వాహా సప్తభ్యః స్వాహా నవభ్యః స్వాహైకాదశభ్యః స్వాహా త్రయోదశభ్యః స్వాహా పఞ్చదశభ్యః స్వాహా సప్తదశభ్యః స్వాహైకాన్న విగ్ంశత్యై స్వాహా నవవిగ్ంశత్యై స్వాహైకాన్న చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా నవచత్వారిగ్ంశతే

స్వాహైకాన్న షష్ట్యై స్వాహా నవషష్ట్యై స్వాహైకాన్నాశీత్యై స్వాహా నవాశీత్యై స్వాహైకాన్న శతాయ స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.14)

ఉదాహరణ 8 :
చతుర్భ్యః స్వాహా ఽష్టాభ్యః స్వాహా ద్వాదశభ్యః స్వాహా షోడశభ్యః స్వాహా విగ్ంశత్యై స్వాహా షణ్ణవత్యై స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

4, 8, 12, 16, 20, 96, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.15)

ఉదాహరణ 9 :
పంచభ్యః స్వాహా దశభ్యః స్వాహా పంచదశభ్యః స్వాహా విగ్ంశత్యై స్వాహా పంచనవత్యై స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

5, 10, 15, 20, 95, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.16)

ఉదాహరణ 10 :
దశభ్యః స్వాహా విగ్ంశత్యై స్వాహా త్రిగ్ంశతే స్వాహా చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా పంచాశతే స్వాహా షష్ట్యై స్వాహా సప్తత్యై స్వాహా ఽశీత్యై స్వాహా నవత్యై స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.17)

ఉదాహరణ 11 :
విగ్ంశత్యై స్వాహా చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా షష్ట్యై స్వాహా ఽశీత్యై స్వాహా శతాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

20, 40, 60, 80, 100 (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.18)

ఉదాహరణ 12 :

పంచాశతే స్వాహా శతాయ స్వాహా ద్వాభ్యాగ్ం శతాభ్యాగ్ం స్వాహా త్రిభ్యః శతేభ్యః స్వాహా చతుర్భ్యః శతేభ్యః స్వాహా పంచభ్యః శతేభ్యః స్వాహా షడ్భ్యః శతేభ్యః స్వాహా సప్తభ్యః శతేభ్యః స్వాహా ఽష్టాభ్యః శతేభ్యః స్వాహా నవభ్యః శతేభ్యః స్వాహా సహస్రాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, (తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.19)

ఉదాహరణ 13 :

శతాయ స్వాహా సహస్రాయ స్వాహాఽయుతాయ స్వాహా నియుతాయ స్వాహా ప్రయుతాయ స్వాహా అర్బుదాయ స్వాహా న్యర్బుదాయ స్వాహా సముద్రాయ స్వాహా మధ్యాయ స్వాహాఽన్తాయ స్వాహా పరార్థాయ స్వాహోషసే స్వాహా వ్యుష్ట్యై స్వాహోదేష్యతే స్వాహోద్యతే స్వాహోదితాయ స్వాహా సువర్గాయ స్వాహా లోకాయ స్వాహా సర్వస్మై స్వాహా ॥

100 (=10^2), 1000 (=10^3), 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}, 10^{16}, 10^{17}, 10^{18}, 10^{19}

గమనిక : ఈ పై మంత్రములన్నింటిలోను చివర 'సర్వస్మై' అను పదం కనిపించుచున్నది. ఇది గణితములోని అనంతము (Infinity) ను సూచించుచున్నట్లు ఉన్నది.

అథర్వవేద

ఉదాహరణ 14 :

య ఏతం దేవమేకవృతం వేద న ద్వితీయో
న తృతీయశ్చతుర్థో నాప్యుచ్యతే ।
న పంచమో న షష్ఠః సప్తమో నాప్యుచ్యతే
నాష్టమో న నవమో దశమో నాప్యుచ్యతే ।
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (అథర్వవేద సంహిత 13.5.16–18)

ఉదాహరణ 15 :

ఏకా చ మే దశ చ మే	(1,10)
ద్వే చ మే విగ్ంశతిశ్చ మే	(2,20)
తిస్రశ్చ మే త్రిగ్ంశచ్చ మే	(3,30)
చతస్రశ్చ మే చత్వారిగ్ంశచ్చ మే	(4,40)
పంచ చ మే పంచాశచ్చ మే	(5,50)
షట్ చ మే షష్టిశ్చ మే	(6,60)
సప్త చ మే సప్తతిశ్చ మే	(7,70)
అష్ట చ మేఽ శీతిశ్చ మే	(8,80)
నవ చ మే నవతిశ్చ మే	(9,90)
దశ చ మే శతం చ మే	(10,100)
శతం చ మే సహస్రం చ	(100, 1000)

(అథర్వవేద సంహిత 5.15)

24. వేదాలలో దశాంశ విధానం-సంఖ్యల పేర్లు

విషయం : వేదాలలో వినియోగించబడిన దశాంశ విధానంలోని సంఖ్యల పేర్లు, వాటి విలువలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

సంఖ్యపేరు		విలువ
ఏక	–	10^{0}
దశ	–	10^{1}
శత	–	10^{2}
సహస్ర	–	10^{3}
అయుత	–	10^{4}
నియుత	–	10^{5}
ప్రయుత	–	10^{6}
అర్బుద	–	10^{7}
న్యర్బుద	–	10^{8}
సముద్ర	–	10^{9}
మధ్య	–	10^{10}
అంత	–	10^{11}
పరార్ధ	–	10^{12}
ఉషస్	–	10^{13}
వ్యుష్టి	–	10^{14}
ఉదేష్య	–	10^{15}
ఉద్యత	–	10^{16}
ఉదిత	–	10^{17}
సువర్గ	–	10^{18}
లోక	–	10^{19}

25. లీలావతీ గణితంలో దశాంశ విధానం - సంఖ్యల పేర్లు

విషయం : లీలావతీ గణితంలో వినియోగించబడిన దశాంశ విధానంలోని సంఖ్యల పేర్లు

వివరణ : భాస్కరాచార్య రచించిన లీలావతీ గణితంలో వివరించిన కొన్ని సంఖ్యలకు వేదాలలో వినియోగించబడిన సంఖ్యల పేర్ల కంటె భిన్నమైన పేర్లు కనిపిస్తున్నాయి. అతను అనుసరించిన దశాంశ విధానంలోని సంఖ్యల పేర్లను, ఆ సంఖ్యల విలువలను ఈ క్రింద ఇవ్వడం జరిగింది.

ఏక దశ శత సహస్రాయుత లక్ష ప్రయుత కోటయః క్రమశః
అర్బుదమబ్జం ఖర్వ నిఖర్వ మహాపద్మ శంకవస్తస్మాత్ ।
జలధిశ్చాంత్యం మధ్యం పరార్ధ్యమితి దశగుణోత్తరాః సంజ్ఞాః
సంఖ్యాయాః స్థానానాం వ్యవహారార్థం కృతాః పూర్వైః ॥

(లీలావతీ గణితం 2.1.2-3)

భావార్థము :

ఒకటి, పది, వంద, వేయి మొదలైన సంఖ్యలు ముందు సంఖ్య కంటె పదిరెట్లు విలువ ఉండేటట్లుగా పూర్వుల చేత సంఖ్యలలోని స్థానాలను వ్యవహరించుటకు ఏర్పాటు చేయబడ్డాయి.

ఈ పై శ్లోకములలో ఇవ్వబడిన సంఖ్యల పేర్లు వాటి విలువలు పట్టిక రూపంలో అందించబడ్డాయి.

ఏక	–	10^0
దశ	–	10^1
శత	–	10^2
సహస్ర	–	10^3
అయుత	–	10^4
లక్ష	–	10^5
ప్రయుత	–	10^6
కోటి	–	10^7
అర్బుద	–	10^8
అబ్జ	–	10^9
ఖర్వ	–	10^{10}
నిఖర్వ	–	10^{11}
మహాపద్మ	–	10^{12}
శంకు	–	10^{13}
జలధి	–	10^{14}
అంత్య	–	10^{15}
మధ్య	–	10^{16}
పరార్ధ	–	10^{17}

26. వాల్మీకి రామాయణంలో దశాంశ విధానం - సంఖ్యల పేర్లు

విషయం : వాల్మీకి రామాయణంలో వినియోగించబడిన దశాంశ విధానంలోని సంఖ్యల పేర్లు

వివరణ : వాల్మీకి మహర్షి రచించిన రామాయణంలో కళ్లు చెదిరే సంఖ్యలను వర్ణించడం జరిగింది. సేతు నిర్మాణమైన తరువాత లంకకు జేరిన వానరుల సంఖ్యను తెలుపవలసినదిగా రావణాసురుడు తన గూఢచారులైన శుక, సారణులను అదేశిస్తాడు. ఆ సమయంలో వారు ముందు సంఖ్యా విధానాన్ని వివరిస్తారు. 'కోటి' అనే సంఖ్యతో ప్రారంభించి, లక్షరెట్లు చొప్పున పెంచుకుంటూ సంఖ్యలను తెలియజేస్తారు. ఆ ఘట్టంలో వర్ణించిన దశాంశ విధానంలోని సంఖ్యల పేర్లను, ఆ సంఖ్యల విలువలను ఈ క్రింద ఇవ్వడం జరిగింది.

శతం శతసహస్రాణాం కోటిమాహుర్మనీషిణః ।
శతం కోటిసహస్రాణాం శంకురిత్యభిధీయతే ॥

శతం శంకుసహస్రాణాం మహాశంకురితి స్మృతః ।
మహాశంకుసహస్రాణాం శతం వృన్దమిహోచ్యతే ॥

శతం వృన్దసహస్రాణాం మహావృన్దమితి స్మృతమ్ ।
మహావృన్దహస్రాణాం శతం పద్మమిహోచ్యతే ॥

శతం పద్మసహస్రాణాం మహాపద్మమితి స్మృతమ్ ।
మహాపద్మసహస్రాణాం శతం ఖర్వమిహోచ్యతే ॥

శతం ఖర్వసహస్రాణాం మహాఖర్వమితి స్మృతమ్ ।
మహాఖర్వసహస్రాణాం సముద్రమభిధీయతే ॥

శతం సముద్రసాహస్రమోఘ ఇత్యభిధీయతే ।
శతం మోఘసహస్రాణాం మహౌఘా ఇతి విశ్రుతః ॥

(వాల్మీకి రామాయణం 6.28.33-38)

కోటి	10^{7}
శంకు (లక్షకోట్లు)	10^{12}
మహాశంకు	10^{17}
వృన్ద	10^{22}
మహావృన్ద	10^{27}
పద్మ	10^{32}
మహాపద్మ	10^{37}
ఖర్వ	10^{42}
మహాఖర్వ	10^{47}
సముద్ర	10^{52}
ఓఘ	10^{57}
మహౌఘ	10^{62}

సంస్కృత భాషలో రచించబడిన ఇతర గ్రంథాలలో అదనంగా లభించిన కొన్ని పెద్ద సంఖ్యల పేర్లు, వాటి విలువలు ఈ దిగువన ఇవ్వబడ్డాయి.

ఉత్సంగ	10^{21}
తిథిలంబ	10^{27}
హేతుహీలమ్	10^{31}
నిత్రవాద్యమ్	10^{41}
సర్వబల	10^{45}
తల్లక్షణమ్	10^{53}

27. గుణకారములు-11 (మేరు ప్రస్తారం)

విషయం : మేరు ప్రస్తారం

వివరణ : 11 యొక్క ఉన్నత ఘాతసంఖ్యలకు విలువలను కనుగొనుట.

(Values of higher powers of 11)

1. 11 యొక్క ఉన్నత ఘాత సంఖ్యలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

11^0	11^5
11^1	11^6
11^2	11^7
11^3	11^8
11^4	11^9 మొదలయినవి.

వీనికి విలువలను కనుగొనాలి.

2. పైన ఇచ్చిన 11 యొక్క ఘాత సంఖ్యలలో కొన్నిటికి విలువలు ఈ విధంగా ఉంటాయి.

$11^0=1$

$11^1=11$

$11^2=11x11=121$

ముందు వచ్చిన ఘాతపు సంఖ్యలకు 11తో గుణకారాలు చేస్తూ ఉంటే తరువాతి ఘాత సంఖ్యలు వస్తాయి.

ఉదాహరణ 1 : $11^3=?$

1. 11^2 ని 11 తో గుణిస్తే 11^3 వస్తుంది.

$11^3=11^2$ x $11=121$x 11

2. $121 \times 11 = 1331$

$\therefore 11^3 = 1331$

3. ఈ సంఖ్యను (11^3ను) 11తో గుణిస్తే 11^4 వస్తుంది.

$11^4 = 11^3 \times 11 = 1331 \times 11 = 14641$

$\therefore 11^4 = 14641$

ఈ సంఖ్యలను ఒక క్రమ పద్ధతిలో వేస్తే ఈ క్రింది విధంగా కనిపిస్తాయి.

11^0	1
11^1	1 1
11^2	1 2 1
11^3	1 3 3 1
11^4	1 4 6 4 1

ఇక్కడ ఒక విషయాన్ని గమనించవచ్చు. పై వరుసలోని అంకెలను క్రమంగా కలిపితే క్రిందివరుసలోని అంకెలు క్రమంగా ఏర్పడుతున్నాయి. అదనంగా రెండు చివరల '1' వేసుకోవాలి. అపుడు ఇచ్చిన ఘాతపు సంఖ్యలను పూర్తిగా సాధించినట్లవుతుంది.

ఇదే పద్ధతిలో 11^4 ను 11తో గుణిస్తే 11^5 వస్తుంది.

$11^5 = 11^4 \times 11 = 14641 \times 11$

4. పై సంఖ్య 14641 లోని అంకెలను క్రమంగా కలిపి, అదనంగా రెండు చివరల '1' వేసుకుంటే అంకెలు ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

1, 5, 10, 10, 5, 1

కుడివైపునుండి చూచినచో ఒకట్ల స్థానంలో ఒక అంకె (=1) ఉంది. పదుల స్థానంలో ఒక అంకె (=5) ఉంది.

కాని వందల స్థానంలో రెండు అంకెల సంఖ్య (10) వచ్చింది.

అదే విధంగా వేల స్థానంలో కూడా రెండు అంకెల సంఖ్య (10) ఉంది. అపుడు ఈ క్రింది విధంగా వ్రాసుకోవాలి.

1	5	1 0	1 0	5	1
1	5	0 1	0 1	5	1

పైన సూచించిన విధంగా వ్రాసుకొని కుడివైపునుండి సూక్ష్మీకరించుకుంటూ సవరణ చేస్తూ వ్రాస్తే ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

1	6	1	0	5	1

$\therefore\ 11^5 = 14641 \times 11 = 161051$

5. ఇదే విధంగా $11^6, 11^7, 11^8, 11^9$ లను సాధిస్తే ఈ క్రింది అంకెలు వస్తాయి.

11^6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

11^7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

11^8 : 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

11^9 : 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1

6. వాటిని ఈ క్రింద సూచించిన విధంగా సూక్ష్మీకరించాలి.

11^6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

1	6	5	0	5	6	1
		1	2	1		
1	7	7	1	5	6	1

11^7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

1	7	1	5	5	1	7	1
		2	3	3	2		
1	9	4	8	7	1	7	1

11^8 : 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

1	8	8	6	0	6	8	8	1
		2	5	7	5	2		
2	1	4	3	5	8	8	8	1

11^9 : 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1

1	9	6	4	6	6	4	6	9	1
		3	8	12	12	8	3		
2	3	5	7	9	4	7	6	9	1

7. ఇదే విధంగా 11 యొక్క ఘాతపు సంఖ్యలలోని అంకెలు, వాటి విలువలను సాధించి ఈ క్రింద పొందుపరచడం జరిగింది.

ఘాతపు సంఖ్య	సంఖ్యలలో వచ్చే అంకెలు	విలువ
11^0	1	1
11^1	1, 1	11
11^2	1, 2, 1	121
11^3	1, 3, 3, 1	1331
11^4	1, 4, 6, 4, 1	14641
11^5	1, 5, 10, 10, 5, 1	161051
11^6	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1	1771561
11^7	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1	19487171
11^8	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1	214358881
11^9	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9,1	2357947691

పైన సూచించిన ఘాతపు సంఖ్యలలోని అంకెల క్రమాన్ని **మేరు ప్రస్తారం** అంటారు.

మేరు ప్రస్తార నిర్మాణ పద్ధతి :

ఛందస్సూత్రాలపై హలాయుధుడు (క్రీ.శ.10 వ శతాబ్ది) రచించిన వ్యాఖ్యానంలో 1,2,3,4 మొదలైన అంకెలతో ఏర్పడే రకరకాల సంబంధాలను గూర్చిన వివరాలు ఉన్నాయి. ఈ సంబంధాల నిర్మాణాన్ని మేరు ప్రస్తారం అంటారు.

ఆదావేకం లిఖేత్ కోష్ఠం తదధో ద్వే తు సంలిఖేత్ ।
తదధః త్రీణి కోష్ఠాని ఏవం రూపేణ వర్ధయేత్ ॥
ఆదావంతే లిఖేదేకం మధ్యం కోష్ఠంచ పూరయేత్ ।
లేఖ్య కోష్ఠోపరి ప్రాప్తైః అగ్రిమాంకేన సంయుతైః ॥

తా॥ ముందుగా ఒక గడిని వ్రాయవలెను. దాని క్రింద రెండు గడులను వ్రాయవలెను. దాని క్రింద మూడు గడులను వ్రాయవలెను. ఈ విధంగా గడులను పెంచుకుంటూ వ్రాయవలెను. ఒక వరుసలోని మొదటి గడిలోను, చివరి గడిలోను '1' వ్రాయవలెను. పై వరుసలోని గడులలోని సంఖ్యలను కలిపి ప్రస్తుత వరుసలోని మధ్య గడులలో వ్రాయవలెను. ఈ విధంగా అన్ని గడులను పూర్తి చేయవలెను.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

మేరు ప్రస్తారం

28. గుణకారములు-12 (వింకులం ఎక్కాలు)

విషయం : వింకులం సంఖ్యలతో ఎక్కాలు సాధించుట.

వివరణ : ప్రతి సంఖ్యకు విలువలో సమానమైన వింకులం సంఖ్యను వ్రాసుకున్నాక ఆ సంఖ్యకు సంబంధించిన ఎక్కములను సులభంగా వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 1 : 9వ ఎక్కమును వ్రాయుట

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 9.
2. 9కి సమానమైన వింకులం సంఖ్యను వ్రాసుకోవాలి.

   $9=10-1=1\bar{1}$
3. 9ని 1తో గుణిస్తే అదే సంఖ్య వస్తుంది.

   $9\times1=9$
4. దీనికి ($9\times1=9$కి) వింకులం సంఖ్య $1\bar{1}$ ని (=9ను) కలిపితే 9×2 చేసినట్లవుతుంది.

   అంటే, ఇక్కడ ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను ఒకటి తగ్గించాలి, పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెను ఒకటి పెంచాలి.

$$\begin{array}{rr} 9\times1= & 09 \\ +9 = & 1\bar{1} \\ \hline 9\times2= & 18 \\ \hline \end{array}$$

5. దీనికి (9×2కు) $1\bar{1}$(=9) ని కలిపితే 9×3 చేసినట్లు అవుతుంది.

$$\begin{array}{rr} 9\times2= & 18 \\ +9 = & 1\bar{1} \\ \hline 9\times3= & 27 \\ \hline \end{array}$$

6. ఈ విధంగా, వచ్చిన సంఖ్యకు $1\bar{1}$ (=9) ను కలుపుతూ ఉంటే 9 వ ఎక్కము వస్తుంది.

9వ ఎక్కము :

కలపవలసిన సంఖ్య = $1\bar{1}$

9×1=	9
9×2	18
9×3=	27
9×4=	36
9×5=	45
9×6=	54
9×7=	63
9×8=	72
9×9=	81
9×10=	90

ఉదాహరణ 2 : 19వ ఎక్కము వ్రాయుట

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య =19
2. 19కి సమానమైన వింకులం సంఖ్య = 20−1=$2\bar{1}$
3. 19ని ఒకటితో గుణిస్తే అదే సంఖ్య వస్తుంది.

   19×1=19

4. దీనికి వింకుల సంఖ్య ($2\bar{1}$) ను కలపాలి

(అనగా ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను ఒకటి తగ్గించాలి, పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెకు రెండు కలపాలి)

$$\begin{array}{lcr} 19\times1 & = & 19 \\ +19 & = & 2\bar{1} \\ \hline & & 38 \\ \hline \end{array}$$

ఈ విధంగా, వచ్చిన సంఖ్యకు $2\bar{1}$ (=19) ను కలుపుతూ ఉంటే 19 వ ఎక్కము వస్తుంది.

19వ ఎక్కము :

కలపవలసిన సంఖ్య = $2\bar{1}$

19×1=	19
19×2	38
19×3=	57
19×4=	76
19×5=	95
19×6=	114
19×7=	133
19×8=	152
19×9=	171
19×10=	190

గమనిక : ఇంతవరకు ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె '0' కంటె తక్కువ రాలేదు. కొన్ని ఎక్కాలలో ఒకట్ల స్థానాన్ని తగ్గించినపుడు '0' కంటె తక్కువ అంకె వచ్చే సందర్భాలలో పక్కనే ఉన్న పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె నుండి ఒకటి తగ్గించి దానిని పది ఒకట్లుగా మార్చుకుని అంకెను వేసుకోవాలి.

ఉదాహరణ 3 : 27వ ఎక్కము వ్రాయుట

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 27
2. 27కి సమానమైన వింకులం సంఖ్య = $30-3=3\overline{3}$
3. 27ని ఒకటితో గుణిస్తే అదే సంఖ్య వస్తుంది.

   27×1=27

4. దీనికి వింకులం సంఖ్య ($3\overline{3}$) ను కలపాలి

   (అనగా, ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను మూడు తగ్గించాలి, పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెకు మూడు కలపాలి)

$$
\begin{array}{lcr}
27\times1 & = & 27 \\
+27 & = & 3\overline{3} \\
\hline
 & & 54 \\
\hline
\end{array}
$$

ఈ విధంగా, వచ్చిన సంఖ్యకు $3\overline{3}$ (=27) ను కలుపుతూ ఉంటే 27 వ ఎక్కము వస్తుంది.

27వ ఎక్కము :

కలపవలసిన సంఖ్య =	$3\overline{3}$
27×1=	27
27×2	54
27×3=	81

$27\times4= 81+3\overline{3}=11\overline{2} = 108$

$27\times5=$ 135

$27\times6=$ 162

$27\times7=162+3\overline{3}=19\overline{1}=$ 189

$27\times8=$ 216

$27\times9=$ 243

$27\times10=$ 270

ఉదాహరణ 4 : 284వ ఎక్కము వ్రాయుట

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 284
2. 284కి సమానమైన వింకులం సంఖ్య $=304-20= 304+\overline{2}0=3\overline{2}4$

284వ ఎక్కము :

కలపవలసిన సంఖ్య = $3\overline{2}4$

$284\times1=$ 284

284×2 568

$284\times3=$ 852

$284\times4=$ 1136

$284\times5=$ 1420

$284\times6=$ 1704

$284\times7=20\overline{2}8=$ 1988

$284\times8=$ 2272

$284\times9=$ 2556

$284\times10=$ 2840

29. గుణకారములు-13 (8తో)

విషయం: 8తో గుణకారాలు – చిత్ర సంఖ్యలు (Magical Numbers)

వివరణ: 8తో గుణకారాలలో కొన్ని సంఖ్యలకు చిత్ర సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి.

1లగాయతు ఆరోహణ క్రమంలో అంకెలు ఉన్న సంఖ్యలను 8తో గుణించి ఆ సంఖ్యలోని కుడి చివరి అంకెను కలిపితే, 9లగాయతు అవరోహణ క్రమంలో అంకెలు ఉన్న సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి.

ఉదాహరణ 1 : $1 \times 8+1=?$

వివరణ:

1. ఇచ్చిన సంఖ్య =1
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకే ఒక్క అంకె '1' ఉంది. అదే ఆఖరి అంకె కూడా అయి ఉంది. దానిని N అనుకుందాము.

   $N=1$

3. ఇచ్చిన సంఖ్యను 8తో గుణించి N ను కలపాలి.

   $1 \times 8+N = 1 \times 8+1=9$

విశేషవివరణ : సమాధాన సంఖ్యలో 9 లగాయితు అవరోహణ క్రమంలో N అంకెలు ఉంటాయి. ఇక్కడ N=1. అందుచేత సమాధానంలో ఒకే ఒక్క అంకె ఉంది.

$\therefore$ సమాధానం : $1 \times 8+1=9$

ఉదాహరణ 2 : $12 \times 8+2=?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 12
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలో 1 లగాయితు ఆరోహణ క్రమంలో రెండు అంకెలు ఉన్నాయి (=12)

3. ఇచ్చిన సంఖ్య (=12) లో ఉన్న రెండు అంకెలలో కుడి చివరన ఆఖరి అంకె = 2. దీనిని N అనుకుందాము.

$N = 2$

4. ఇచ్చిన సంఖ్యను 8తో గుణించి, N (=2) ను కలపాలి.

$12 \times 8 + N = 12 \times 8 + 2 = 98$

విశేషవివరణ : సమాధాన సంఖ్యలో 9 లగాయితు అవరోహణ క్రమంలో N అంకెలు ఉంటాయి. ఇక్కడ N=2. అందుచేత సమాధానంలో రెండంకెలు ఉన్నాయి.

∴ సమాధానం : $12 \times 8 + 2 = 98$

గమనిక :

ఈ విధంగా 8తో గుణకారాలతో వచ్చే సంఖ్యలో ఒక క్రమం కనిపిస్తుంది. అందుచేత వాటిని చిత్ర సంఖ్యలు (Magical Numbers) అంటారు. వాటిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

$1234 \times 8 + 4 = 9876$

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

$123456 \times 8 + 6 = 987654$

$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$

$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$

$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

30. గుణకారములు-14 (9తో)

విషయం: 9తో గుణకారాలు - చిత్ర సంఖ్యలు (Magical Numbers)

వివరణ : 9తో గుణకారాలలో కొన్ని సంఖ్యలకు చిత్ర సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి.

1 లగాయతు ఆరోహణ క్రమంలో అంకెలు ఉన్న సంఖ్యను 9తో గుణించి ఆ సంఖ్యలోని కుడి చివరి అంకెకు ఒకటి కలపగా వచ్చే సంఖ్యను కూడితే, అన్నీ ఒకట్లు ఉండే చిత్ర సంఖ్యలు ఏర్పడతాయి.

ఉదాహరణ 1 : $1\times9+2=?$

వివరణ:

1. ఇచ్చిన సంఖ్య =1
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఆఖరి అంకె (=1) ను M అనుకుందాము.

   M = 1
3. దానికి ఒకటి కలపాలి. కలపగా వచ్చిన సంఖ్యను N అనుకొందాము.

   N=M+1=2
4. ఇచ్చిన సంఖ్యను 9తో గుణించి, N ను కలపాలి.

   $1\times9+N=1\times9+2=11$

విశేషవివరణ: సమాధానం (=11) గా వచ్చిన సంఖ్యలో N (=2) ఒకట్లు ఉన్నాయి.

గమనిక 1:

ఈ విధంగా 9తో గుణకారాలతో వచ్చే సంఖ్యలో ఒక క్రమం కనిపిస్తుంది. అందుచేత వాటిని చిత్ర సంఖ్యలు (Magical Numbers) అంటారు. వాటిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$1 \times 9 + 2 = 11$

$12 \times 9 + 3 = 111$

$123 \times 9 + 4 = 111\ 1$

$1234 \times 9 + 5 = 111\ 11$

$12345 \times 9 + 6 = 111\ 111$

$123456 \times 9 + 7 = 111\ 111\ 1$

$1234567 \times 9 + 8 = 111\ 111\ 11$

$12345678 \times 9 + 9 = 111\ 111\ 111$

$123456789 \times 9 + 10 = 111\ 111\ 111\ 1$

గమనిక 2:

9తో గుణకారాలలో కొన్ని సంఖ్యలకు "8" అంకెతో మాత్రమే ఏర్పడే చిత్రసంఖ్యలు వస్తాయి. వాటిని ఈ క్రింద చూపించడం జరిగింది.

$9 \times 9 + 7 = 88$

$98 \times 9 + 6 = 888$

$987 \times 9 + 5 = 888\ 8$

$9876 \times 9 + 4 = 888\ 88$

$98765 \times 9 + 3 = 888\ 888$

$987654 \times 9 + 2 = 888\ 888\ 8$

$9876543 \times 9 + 1 = 888\ 888\ 88$

$98765432 \times 9 + 0 = 888\ 888\ 888$

31. గుణకారములు-15 (11 మరియు 111 సంఖ్యల వర్గాలు)

విషయం : '1' మాత్రమే గల సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనుట

వివరణ :

1. '1' మాత్రమే గల సంఖ్యలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1	1111
11	11111
111	111111 మొదలైనవి

2. వర్గాన్ని కనుగొనవలసిన సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యగా అనుకొందాము.

3. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎన్ని ఒకట్లు ఉన్నాయో లెక్కించాలి. దానిని N అనుకొందాము.

సమాధానం వ్రాయడంలో మొదటిభాగం :

4. సమాధానాన్ని ఎడమ చివర నుండి వేసుకోవచ్చును.

5. ముందుగా సమాధానములో ఎడమచివరన 1ని వ్రాయాలి.

6. దానికి (1కి) కుడివైపున 2 వ్రాయాలి. దానికి (2కి) కుడివైపున 3 వ్రాయాలి. ఈ విధంగా అంకెలను N వచ్చేంతవరకూ వ్రాసుకుంటూ వెళ్ళాలి. N విలువను కూడ వ్రాయాలి.

సమాధానం వ్రాయడంలో రెండవభాగం :

8. ఇప్పుడు N నుండి అంకెలను తగ్గించుకుంటూ కుడివైపున '1' వచ్చేంతవరకూ వ్రాయాలి.

9. అప్పటికి సమాధానం పూర్తిగా వచ్చినట్లవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : $11^2 = ?$

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య (=11) లో రెండు ఒకట్లు ఉన్నాయి. అందుచేత N = 2

మొదటిభాగం

2. సమాధానంలో ఎడమచివరన 1 తో ప్రారంభించి N (=2) వచ్చేంత వరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

1 2

రెండవభాగం

3. N (=2) నుండి ప్రారంభించి, విలువను తగ్గించుకుంటూ 1 వచ్చేంత వరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి :

1 2 1

4. సమాధానం = 121

ఉదాహరణ 2: 111^2=?

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య (=111) లో మూడు ఒకట్లు ఉన్నాయి. అందుచేత N = 3

మొదటిభాగం

2. సమాధానంలో ఎడమచివరన 1 తో ప్రారంభించి N (=3) వచ్చేంత వరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి : 1 2 3

రెండవభాగం

3. N (=3) నుండి ప్రారంభించి, విలువలను తగ్గించుకుంటూ 1 వచ్చేంతవరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి

1 2 3 2 1

4. సమాధానం : 111^2 = 12321

ఉదాహరణ 3: $1111^2=?$

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య (=1111) లో నాలుగు ఒకట్లు ఉన్నాయి. అందుచేత N = 4

మొదటిభాగం

2. సమాధానంలో ఎడమచివరన 1 తో ప్రారంభించి N (=4) వచ్చేంత వరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి : 1 2 3 4

రెండవభాగం

3. N (=4) నుండి ప్రారంభించి, విలువలను తగ్గించుకుంటూ 1 వచ్చేంతవరకూ వ్రాయాలి.

ఇప్పటి స్థితి

1 2 3 4 3 2 1

4. సమాధానం : $1111^2 = 1234321$

గమనిక :

ఈ విధంగా '1' మాత్రమే గల సంఖ్యల వర్గాలు ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

$111111^2 = 12345654321$ మొదలగునవి

32. గుణకారములు-16 (22 మరియు 222 సంఖ్యల వర్గాలు)

విషయం : ఒకే అంకెతో నిర్మాణమైన సంఖ్యల వర్గాలను కనుగొనుట

వివరణ :

1. ఒకే అంకె గల సంఖ్యలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

    22

    222

    2222

    33

    333

    4444

    55555 మొదలైనవి.

వీటికి వర్గాలను సులభంగా కనుగొనే పద్ధతి ఈ క్రింద ఉదాహరణలతో వివరించబడింది.

ఉదాహరణ 1 : $22^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 22
2. 11ని 2 తో గుణిస్తే ఇచ్చిన సంఖ్య వస్తుంది.

    $22 = 2 \times 11$
3. $22^2 = (2 \times 11)^2 = 2^2 \times 11^2 = 4 \times 11^2$
4. 11^2 విలువ మనకు తెలుసు.

    $11^2 = 121$
5. సమాధానం:

    $22^2 = 4 \times 11^2 = 4 \times 121 = 484$

ఉదాహరణ 2 : $222^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 222

   111 ని 2తో గుణిస్తే 222 వస్తుంది.

2. $222^2 = (2 \times 111)^2 = 2^2 \times 111^2 = 4 \times 111^2$

3. 111^2 విలువ మనకు తెలుసు

   $111^2 = 12321$

4. $222^2 = 4 \times 111^2 = 4 \times 12321 = 49284$

ఉదాహరణ 3 : $5555^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 5555

2. $5555 = 5 \times 1111$

3. $5555^2 = 5^2 \times 1111^2 = 25 \times 1234321 = 30858025$

33. గుణకారములు-17 (11తో)

సూత్రం : **అంత్యయోరేవ (11తో గుణకారములు)**

అర్థం : **రెండు చివరల ఉన్న అంకెలకు మాత్రమే**

వివరణ :

1. ఈ సూత్రం 11తో చేసే గుణకారాల్లో బాగా ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఈ గుణకారాన్ని సాధిస్తున్నపుడు మూడుసంఖ్యలు ఉంటాయి.

   మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 11

   రెండవ సంఖ్య = గుణించబడుచున్న సంఖ్య = **ఇచ్చిన సంఖ్య**

   మూడవ సంఖ్య = **సమాధానం** = పైరెండు అంకెలను గుణించగా వచ్చే లబ్ధం. దీనిని సాధించవలసి ఉంది.
3. గుణించే పద్ధతి : సమాధానంలో రాబోయే అంకెలు :

   i) ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడి చివరన ఉన్న అంకె సమాధానంలో కుడి చివరకు వస్తుంది.

   ii) ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను కుడివైపునుండి ఎడమవైపుకు క్రమంగా రెండేసి చొప్పున కలపగా వచ్చే అంకెలు సమాధానంలోని మధ్య అంకెలుగా వస్తాయి.

   iii) ఆఖరుకు, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమ చివరన ఉన్న అంకె సమాధానంలో ఎడమచివరకు వస్తుంది. ఈ విధంగా సమాధానం వస్తుంది.

ఉదాహరణ1 : 15 × 11 = ?

1. మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 11
2. రెండవ సంఖ్య = ఇచ్చిన సంఖ్య = 15
3. మూడవ సంఖ్యను (అంటే సమాధానాన్ని) కనుగొనాలి.
4. ఇచ్చిన సంఖ్య (=15) లోని కుడిచివరన ఉన్న అంకె = 5.
5. సమాధానంలో కుడిచివరన అంకె (= సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో

వచ్చే అంకె) = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడి చివరన ఉన్న సంఖ్య = 5.

ఇప్పటి స్థితి :

సమాధానం = _ _ 5

6. ఇచ్చిన సంఖ్య (=15) లో కుడిచివర నుండి ఎడమ వైపుకు క్రమంగా ఉన్నవి రెండు అంకెలు. అవి 5, 1 గా ఉన్నాయి

7. పైన చూపిన అంకెలను కలపగా 5 + 1 = 6 వస్తుంది.

8. ఈ అంకెను (6) ను సమాధానంలో పదులస్థానంలో వేసుకోవాలి.

9. ఇప్పటి స్థితి : _ 6 5

10. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంక కలపవలసిన అంకెలు ఏమిలేవు. అందుచే సమాధానంలో మధ్యలో రాగల్గిన అంకెలు అదనంగా ఏమీలేవు.

11. చివరగా, సమాధానంలో ఎడమ చివరన రాగల్గిన అంకె = సమాధానంలో వందలస్థానంలో వచ్చే అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమచివరి అంకె = 1

10. ఇప్పటి స్థితి : = 1 6 5

సమాధానం = 15 × 11 = 165

ఉదాహరణ 2 : 25 × 11

1. మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 11
2. రెండవ సంఖ్య = ఇచ్చిన సంఖ్య = 25
3. మూడవ సంఖ్యను (అంటే సమాధానాన్ని) కనుగొనాలి.
4. ఇచ్చిన సంఖ్య (=25) లోని కుడిచివరన ఉన్న అంకె = 5.
5. సమాధానంలో కుడిచివరన అంకె (= సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో వచ్చే అంకె) = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడి చివరన ఉన్న సంఖ్య = 5

   ఇప్పటి స్థితి :

   సమాధానం = _ _ 5

6. ఇచ్చిన సంఖ్య (=25) లో కుడిచివర నుండి ఎడమ వైపుకు క్రమంగా ఉన్నవి రెండు అంకెలు. అవి 5, 2 గా ఉన్నాయి

7. పైన చూపిన అంకెలను కలపగా 5 + 2 = 7 వస్తుంది.

8. ఈ అంకెను (7) ను సమాధానంలో పదులస్థానంలో వేసుకోవాలి.

9. ఇప్పటి స్థితి : _ 7 5

10. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంక కలపవలసిన అంకెలు ఏమిలేవు. అందుచే సమాధానంలో మధ్యలో రాగల్గిన అంకెలు అదనంగా ఏమీలేవు.

11. చివరగా, సమాధానంలో ఎడమ చివరన రాగల్గిన అంకె = సమాధానంలో వందలస్థానంలో వచ్చే అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమచివరి అంకె = 2

12. ఇప్పటి స్థితి : = 2 7 5

    సమాధానం = 25 × 11 = 275

ఉదాహరణ 3 : 254 × 11

1. మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 11

2. రెండవ సంఖ్య = ఇచ్చిన సంఖ్య = 254

3. మూడవ సంఖ్యను (అంటే సమాధానాన్ని) కనుగొనాలి.

4. ఇచ్చిన సంఖ్య (254) లోని కుడిచివరన ఉన్న అంకె = 4.

5. సమాధానంలో కుడిచివరి అంకె (= సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో వచ్చే అంకె) = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడి చివరన ఉన్న సంఖ్య = 4

   ఇప్పటి స్థితి : _ _ _ 4

6. ఇచ్చిన సంఖ్య (=254) లో కుడిచివర నుండి ఎడమ వైపుకు క్రమంగా ఉన్నవి మూడు అంకెలు. అవి 4, 5, 2 గా ఉన్నాయి.

7. పైన చూపిన మొదటి రెండు అంకెలను కలపగా 4 + 5 = 9 వస్తుంది.

8. ఈ అంకెను (9) ను సమాధానంలో పదులస్థానంలో వేసుకోవాలి.

9. ఇప్పటి స్థితి : _ _ 9 4

   తరువాతి రెండు అంకెలను కలపగా 5 + 2 = 7 వస్తుంది.

10. ఈ అంకెను (7) ను సమాధానంలో వందల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

    ఇప్పటి స్థితి : _ 7 9 4

11. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంక కలపవలసిన అంకెలు ఏమిలేవు. అందుచే సమాధానంలో మధ్యలో రాగల్గిన అంకెలు అదనంగా ఏమీలేవు.

12. చివరగా, సమాధానంలో ఎడమ చివరన రాగల్గిన అంకె = సమాధానంలో వేల స్థానంలో వచ్చే అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమచివరి అంకె = 2

13. ఇప్పటి స్థితి : = $\underline{2}$ $\underline{7}$ $\underline{9}$ $\underline{4}$

సమాధానం = 254 × 11 = 2794

ఉదాహరణ 4 : 3452 × 11 = ?

1. మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 11
2. రెండవ సంఖ్య = ఇచ్చిన సంఖ్య = 3452
3. మూడవ సంఖ్యను (అంటే సమాధానాన్ని) కనుగొనాలి.
4. ఇచ్చిన సంఖ్య (=3452) లోని కుడిచివరన ఉన్న అంకె = 2.
5. సమాధానంలో కుడిచివరి అంకె (= సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో వచ్చే అంకె) = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడి చివరన ఉన్న సంఖ్య = 2

   ఇప్పటి స్థితి: _ _ _ _ $\underline{2}$
6. ఇచ్చిన సంఖ్య (=3452) లో కుడిచివర నుండి ఎడమ వైపుకు క్రమంగా ఉన్నవి నాలుగు అంకెలు. అవి 2, 5, 4, 3 గా ఉన్నాయి
7. పైన చూపిన మొదటి రెండు అంకెలను కలపగా 2 + 5 = 7 వస్తుంది.
8. ఈ అంకెను (7) ను సమాధానంలో పదులస్థానంలో వేసుకోవాలి.
9. ఇప్పటి స్థితి : _ _ _ $\underline{7}$ $\underline{2}$
10. తరువాతి రెండు అంకెలను కలపగా 5 + 4 = 9 వస్తుంది.
11. ఈ అంకెను (9) ను సమాధానంలో వందల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

    ఇప్పటి స్థితి : _ _ $\underline{9}$ $\underline{7}$ $\underline{2}$
12. తరువాతి రెండు అంకెలను కలపగా 4 + 3 = 7 వస్తుంది.
13. ఈ అంకెను (7) ను సమాధానంలో వేల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

    ఇప్పటి స్థితి : _ $\underline{7}$ $\underline{9}$ $\underline{7}$ $\underline{2}$

14. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంక కలపవలసిన అంకెలు ఏమిలేవు. అందుచే సమాధానంలో మధ్యలో రాగల్గిన అంకెలు అదనంగా ఏమీలేవు.

15. చివరగా, సమాధానంలో ఎడమ చివరన రాగల్గిన అంకె = సమాధానంలో పదివేల స్థానంలో వచ్చే అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమచివరి అంకె = 3

12. ఇప్పటి స్థితి : = $\underline{3}\ \underline{7}\ \underline{9}\ \underline{7}\ \underline{2}$

సమాధానం = 3452 × 11 = 37972

34. గుణకారములు-18 (12 మరియు 13తో)

సూత్రం : అంత్య యోరేవ (12 మరియు 13 మొదలైన అంకెలతో గుణకారములు)

అర్థం : రెండు చివరల ఉన్న అంకెలకు మాత్రమే

వివరణ :

ఈ సూత్రాన్ని 12 మరియు13 మొదలైన అంకెలతో గుణకారాన్ని చేయడానికి ఉపయోగిస్తారు. 12 తో చేసే గుణకారం ఈ క్రింద వివరించబడింది.

1. గుణకారం సాధిస్తున్నప్పుడు 3 సంఖ్యలు ఉంటాయి.

   మొదటి సంఖ్య = గుణిస్తున్న సంఖ్య = 12 (ఉదాహరణకు)

   రెండవ సంఖ్య = గుణించబడుచున్న సంఖ్య = ఇచ్చిన సంఖ్య

   మూడవ సంఖ్య = సమాధానం = పై రెండు సంఖ్యలను గుణించగా వచ్చే లబ్ధం దీనిని మనం సాధించవలసి ఉంది.

2. క్రింద చూపిన విధంగా ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెను గుణించి దానికి కుడివైపున ఉన్న అంకెను కలిపి సమాధానంలో వేసుకోవాలి.

   సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె × 2

   సమాధానంలో పదుల స్థానంలోని అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానంలోని అంకె × 2 + ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె

   సమాధానంలో వందల స్థానంలో అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని వందల స్థానంలోని అంకె × 2 + ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదులస్థానంలోని అంకె.

3. ఈ విధంగా ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను అన్నింటిని క్రమంగా గుణిస్తూ చేయాలి.

4. ఆఖరున సమాధానంలో ఎడమ చివరి అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమ చివరి అంకె

5. పై గుణకారాలలో ఏస్థానంలోనైనా రెండు అంకెల సంఖ్యలు వచ్చినచో, ఆ సంఖ్యలోని ఎడమవైపు అంకెను పైస్థానంలోని అంకెకు కలపాలి.
6. ఈ పద్ధతిలో 12 లగాయితు 19 వరకు గుణకారాలను చేయవచ్చును.

ఉదాహరణ 1 : 24 × 12 = ?

1. గుణిస్తున్న సంఖ్య = 12
2. ఇచ్చిన సంఖ్య = 24
3. సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఒకట్లస్థానంలో ఉన్న అంకె × 2

   = 4 × 2 = 8

   ఇప్పటి స్థితి :

```
     =  2   4
       ×1   2  ↑
------------
        - - 8
------------
```

4. సమాధానంలో పదుల స్థానంలో అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె × 2 + ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె

   = 2 × 2 + 4 = 4 + 4 = 8

   ఇప్పటి స్థితి :

```
                          2   4
                          1   2
                          -----
(= 2 × 2 + 4 = 8)  →    _ 8 8
```

5. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఇంకను గుణించ వలసిన అంకెలు ఏమీలేవు.

6. ఆఖరిగా, సమాధానంలో ఎడమచివరన ఉండే అంకె = ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమ చివరన ఉన్న అంకె = 2

   ఇప్పటి స్థితి :

   2 8 8

సమాధానం : $24 \times 12 = 288$

35. గుణకారములు-19 (11 మరియు 101 సంఖ్యల వర్గాలు)

విషయం : 11 మధ్యలో సున్నలు (Zeros) ఉన్న సంఖ్యలకు వర్గాలు కనుగొనుట :

వివరణ :

11 అనే సంఖ్య మధ్యలో సున్నలు ఉన్న సంఖ్యలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

101

1001

10001

100001 మొదలైనవి

ఈ సంఖ్యలను అదే సంఖ్యలతో గుణించి వాటి విలువలను కనుగొనాలి.

11 మధ్య సున్నలు వ్రాయడం ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్య ఏర్పడుతుంది. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎన్ని సున్నలు ఉంటే, 11 యొక్క వర్గమైన 121లోని అంకెల మధ్య కూడ అన్ని సున్నలను వ్రాయడం ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గాన్ని కనుగొన్నట్లు అవుతుంది.

('11' అనే సంఖ్యలో ఒకట్ల మధ్య ఒక సున్న వ్రాయడం ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్య 101 ఏర్పడింది. అందుచే N = 1 అనుకొందాం.

సున్నల సంఖ్య = N

11 యొక్క వర్గంలోని ప్రతి రెండు అంకెల మధ్య 'N' సున్నల చొప్పున వ్రాయడం ద్వారా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గాన్ని వ్రాసినట్లవుతుంది.)

ఉదాహరణ 1 : 101^2=?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 101
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమ చివరను, కుడి చివరను గల ఒకట్ల మధ్యలో ఉన్న సున్నల సంఖ్య = 1. దీనిని N అనుకొందాము. N=1
3. 11^2 = 121
4. 121 అనే సంఖ్యలో రెండేసి అంకెల మధ్య 'N' సున్నలు వ్రాయాలి (అంటే 1కి 2కి మధ్య ఒక సున్న వ్రాయాలి, అదేవిధంగా 2కి 1కి మధ్య ఒక సున్న వ్రాయాలి.)

5. సమాధానం = 101^2 = 10201

ఉదాహరణ 2 : 1001^2 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 1001
2. మధ్యలో ఉన్న సున్నల సంఖ్య = 2

   N = 2
3. 11 యొక్క వర్గం = 11^2 = 121
4. 121లోని అంకెల మధ్య రెండేసి సున్నలు (N = 2) వ్రాయాలి.
5. సమాధానం = 1001^2 = 1002001

ఉదాహరణ 3 : 10001^2 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 10001
2. మధ్యలో ఉన్న సున్నల సంఖ్య = 3

   N = 3
3. 11 యొక్క వర్గం = 11^2 = 121
4. 121లోని అంకెల మధ్య మూడేసి సున్నలు (N = 3) వ్రాయాలి.
5. సమాధానం = 10001^2 = 100020001

గమనిక :

ఈ విధంగా వచ్చే సంఖ్యలలో ఒక క్రమం కనిపిస్తుంది. వాటిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

11^2=121

101^2=10201

1001^2=1002001

10001^2=100020001

100001^2=10000200001 మొదలైనవి.

36. గుణకారములు-20 (9 మరియు 18తో)

విషయం : త్వరితముగా గుణకారములు చేయుటకు కొన్ని పద్ధతులు.

15 తో గుణించుటకు :

ఉదాహరణ1 : 48×15 = ?

15 = 10 + 5 గా భావించవచ్చును. ఇచ్చిన సంఖ్యను 10తో గుణించాలి. ఆ వచ్చిన విలువకు దానిలో సగమును కలపాలి.

$$48 \times 10 = 480$$

$$48 \times 5 = 240$$

$$720$$

∴ సమాధానము : 48×15 = 720

7.5 తో గుణించుటకు :

ఉదాహరణ2 : 64×7.5 = ?

7.5ను (7 1/2) 10×3/4 గా భావించవచ్చును. ఇచ్చిన సంఖ్యను 10తో గుణించాలి. ఆ వచ్చిన విలువను 4తో భాగించి, 3తో గుణించాలి.

$$64\times10 = 640$$

$$640\div4 = 160$$

$$160\times3 = 480$$

∴ సమాధానము : 64×7.5 = 480

9 తో గుణించుటకు :

9 ని 10−1 గా భావించవచ్చును. ఇచ్చిన సంఖ్యను 10తో గుణించాలి. ఆ వచ్చిన విలువ నుండి ఇచ్చిన సంఖ్యను తీసివేయాలి.

ఉదాహరణ3 : 84×9 = ?

$$\begin{array}{r} 84\times10 = 840 \\ -84 \\ \hline 756 \\ \hline \end{array}$$

∴ సమాధానము : 84×9 = 756

18 తో గుణించుటకు :

పైన వర్ణించిన పద్ధతిలో ఇచ్చిన సంఖ్యను 9తో గుణించి, ఆ వచ్చిన విలువను 2 తో గుణించాలి.

ఉదాహరణ4 : 84×18 = ?

$$\begin{array}{r} 84\times10 = \quad 840 \\ -84 \\ \hline 756 \\ \times2 \\ \hline 1512 \\ \hline \end{array}$$

54 తో గుణించుటకు :

పైన వర్ణించిన పద్ధతిలో ఇచ్చిన సంఖ్యను 9తో గుణించి, ఆ వచ్చిన విలువను 6 తో గుణించాలి.

ఉదాహరణ5 : 765×54 = ?

$$
\begin{array}{r}
765 \times 9 = 6885 \\
\times 6 \\
\hline
41310 \\
\hline
\end{array}
$$

37. గుణకారములు-21 (25తో)

విషయం : ఒక సంఖ్యను 25తో గుణించుట.

వివరణ : ఏ సంఖ్యకయినా 25తో గుణకారాన్ని చాలా సులభంగానే సాధించవచ్చు.

1. 25 యొక్క విలువ 100లో నాల్గవవంతు.

3. అందుచేత ఇచ్చిన సంఖ్యను ముందుగా 100తో గుణించి, దానిని 4తో భాగించాలి. ఆ విధంగా చేస్తే ఇచ్చిన సంఖ్యను 25తో గుణించినట్లు అవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : 12×25 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 12

2. 12 ను 100 తో గుణించాలి

   12×100=1200

3. దీనిని (1200 ను) 4తో భాగించాలి

   1200 ÷ 4 = 300

4. సమాధానం = 12×25 = 300

ఉదాహరణ 2 : 18×25 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 18

2. 18 ని 100తో గుణించాలి

   18×100=1800

3. దీనిని (1800 ను) 4తో భాగించాలి

   1800 ÷ 4 = 450

4. సమాధానం = 18×25 = 450

38. అక్షహృదయము

విషయం : సంఖ్యలకు సంబంధించిన ఒక అపూర్వమైన విద్య.

వివరణ :

1. ఏ వస్తువులోనైనను, సామాన్యముగా లెక్కపెట్టలేనన్ని అంతర్భాగములను ఒక అపూర్వమైన విద్య ద్వారా లెక్కపెట్టవచ్చును అని మన ప్రాచీన గ్రంథములనుండి తెలుస్తోంది. ఈ అపూర్వ విద్యనే 'అక్షహృదయము' అంటారు. ఇది గురు ముఖతః నేర్చుకోదగిన విద్య అని కూడ తెలుస్తోంది.

2. ఈ విద్య పూర్వము ఋతుపర్ణుడు అను రాజు దగ్గర నలమహారాజు నేర్చుకొనినట్లుగా మనకు మహాభారతంలో వర్ణించబడింది.

ఇది యక్షహృదయమనగా
విదితంబగు విద్య; దీని విధ్యుక్తముగా
మదినెరుగు నరుడు సంఖ్యా
విదుడగు; దష్కృత కళంక విష ముక్తుడగున్.

(ఆంధ్రమహాభారతం, అరణ్యపర్వము)

దీని సహాయముతో ఒక చెట్టుకు ఉన్న ఆకుల సంఖ్యను వెంటనే చెప్పగలిగేవారుట.

3. ఇదే విద్యను ధర్మరాజు కూడ అధ్యయనము చేసినట్లు మహాభారతం ద్వారా తెలుస్తోంది. దీని సహాయముతో మహాభారత యుద్ధములో మరణించిన సైనికుల, గుఱ్ఱముల, ఏనుగుల సంఖ్యను క్షణకాలములో ధర్మరాజు ధృతరాష్ట్రునకు చెప్పినట్లు తెలుస్తోంది.

39. సంఖ్యలలో స్థానాల విలువ

విషయం : సంఖ్యలలో స్థానాలను బట్టి విలువలు నిర్ణయించబడుట

వివరణ :

1. ఒక సంఖ్యలో ఒక అంకె ఎన్నిసార్లైనా రావచ్చును.
2. ఆ సంఖ్య యొక్క మొత్తం విలువను నిర్ణయించే సందర్భంలో ఆ అంకెలు ఉన్న స్థానాలను బట్టి వాటి విలువలను గుర్తించవలసి ఉంటుంది.
3. ప్రతి సంఖ్యలోను అంకెలను వ్రాసే ప్రదేశాలను 'స్థానములు' అంటారు. వాటిని ఒకట్ల స్థానం, పదుల స్థానం, వందల స్థానం మొదలైన పేర్లతో పిలుస్తారు.

ఉదాహరణ 1 :

3 4 5

5 → ఒకట్ల స్థానం

4 → పదుల స్థానం

3 → వందల స్థానం

మూడు అంకెలు 3, 4, 5 లను విడి విడిగా చూచినచో 3 కంటే 4 పెద్దది, 4 కంటే 5 పెద్దది.

కాని ఈ మూడు అంకెలను వినియోగిస్తూ వ్రాసే సంఖ్య 345 లో

3 యొక్క విలువ = 300

4 యొక్క విలువ = 40

5 యొక్క విలువ = 5

ఒకే అంకె భిన్న భిన్న స్థానాలలో ఉంటూ ఏర్పడే సంఖ్యకు ఉదాహరణగా 111 వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ అన్ని స్థానాలలోను ఒకే అంకె (=1) ఉన్నను, దాని విలువ వేరు వేరుగా ఉంటుంది.

దీనిని వివరించే శ్లోకం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

యథా ఏకరేఖా శతస్థానే శతం, దశస్థానే దశ,
ఏవం చ ఏకస్థానే,
యథా ఏకత్వే అపి స్త్రీ మాతా చ ఉచ్యతే
దుహితా స్వసా చ ఇతి ॥
('యోగ సూత్ర' వ్యాసభాష్యం, క్రీ.శ. 6వ శతాబ్ది)

తా॥ స్త్రీ తాను ఒక్కతె మాత్రమే అయినప్పటికి, సందర్భాన్నిబట్టి, తల్లి అని, కుమార్తె అని, చెల్లెలు అని రకరకాల పేర్లతో పిలువబడినట్లుగానే ఒకే గీత (అంకె ఒకటి) వందల స్థానంలో వందను, పదుల స్థానంలో పదిని, అట్లాగే ఒకట్ల స్థానంలో (ఒకటిని) సూచిస్తుంది.

40. అనంతము (లీలావతి)

విషయం : సంఖ్యలలో 'అనంతము' యొక్క లక్షణము

వివరణ :

1. లెక్కపెట్టలేని సంఖ్యను అనంతం (Infinity) అంటాము. ఈ పదాన్ని గణితంలో విరివిగా వినియోగిస్తూ ఉంటాము.

2. ఒక సంఖ్యను సున్నతో భాగిస్తే 'అనంతం' వస్తుంది అని కూడా మనం అంటాము. దీనిని భాస్కరాచార్య తాను రచించిన బీజగణితంలో ఈ విధంగా వర్ణించాడు.

అస్మిన్ వికారః ఖహరే న రాశా
　　వపి ప్రవిష్టే ష్వపి నిఃసృతేషు ।
బహుష్వపి స్యాల్లయసృష్టికాలే
　　అనంతే అచ్యుతే భూతగణేషు యద్వత్ ॥

తా॥ ప్రళయ కాలంలో జీవులు అందరూ పరమేశ్వరునిలో కలుస్తారు. సృష్టికాలంలో ఆ జీవులంతా పరమేశ్వరుని నుండి బయటకు వస్తారు. అనంతుడు (అంతములేని వాడు), అచ్యుతుడు (తరగనివాడు) అయిన పరమేశ్వరునిలో ఈ జీవరాశులన్నీ ప్రవేశించినప్పుడు ఆయనలో మార్పులేదు. అదేవిధంగా ఈ జీవరాశులన్నీ పరమేశ్వరుని నుండి విడిపోయినప్పుడు కూడ ఆయనలో ఏమీ మార్పురాదు.

3. ఇదే విధంగా 'సున్న' హారము (Denominator) నందుగల సంఖ్యకు ఎంతపెద్ద సంఖ్యను కలిపినను, లేక తీసివేసినను, ఏమీ మార్పురాదు.

$$\frac{n}{0} \text{ విలువ} + \text{పెద్ద సంఖ్య} = \frac{n}{0} \text{ విలువ}$$

$$\frac{n}{0} \text{ విలువ} - \text{పెద్ద సంఖ్య} = \frac{n}{0} \text{ విలువ}$$

4. ఈ అనంతాన్నే పూర్ణమదః పూర్ణమిదం మంత్రార్థంతో కూడ వివరిస్తారు.

41. అచ్చులు - హల్లులు

శ్లో॥ నృత్తావసానే నటరాజరాజో
నవాద ఢక్కాం నవపంచవారమ్
ఉద్ధర్తుకామస్సనకాది సిద్ధాన్
ఏతద్విమర్శే శివసూత్ర జాలమ్

భావార్థము : ఒకనాటి సాయంసంధ్యాసమయంలో నటరాజరాజు సనకాది మహర్షులను అనుగ్రహించుట కొరకై తాండవము చేయుచు తన ఢక్కను 14 పర్యాయములు మ్రోగించెను. ఆ శబ్దములు ఈ క్రింది విధంగా గ్రహించబడినవి. వీటినే మాహేశ్వర సూత్రములు అని అందురు. వీటి సహాయంతోనే పాణిని మహర్షి 'అష్టాధ్యాయి' అనే పేరుగల సంస్కృత వ్యాకరణ గ్రంథాన్ని రచించాడు.

1. అ ఇ ఉణ్
2. ఋ ఌ క్
3. ఏ ఓ ఙ్
4. ఐ ఔ చ్
5. హ య వ ర ట్
6. ల ణ్
7. ఞ మ ఙ ణ న మ్
8. ఝ భ ఞ్
9. ఘ ఢ ధ ష్
10. జ బ గ డ ద శ్
11. ఖ ఫ ఛ ఠ థ చ ట త వ్
12. క ప య్
13. శ ష స ర్
14. హ ల్

అచ్చులు అను పేరు వచ్చుటకు కారణము :

1వ సూత్రములోని (అ ఇ ఉణ్) మొదటి అక్షరము = అ

4వ సూత్రములోని (ఐ ఔ చ్) చివరి అక్షరము = చ్

ఈ రెండింటిని కలుపగా వచ్చునది = అచ్

ఈ సంజ్ఞ (అచ్) మొదటి సూత్రము నుండి ప్రారంభించి నాల్గవ సూత్రము చివరి వరకు మధ్యలో ఉన్న అక్షరములను (అ, ఇ, ఉ మొదలగునవి) సూచించును. అందుచే వీటిని అచ్చులు అందురు.

హల్లులు అను పేరు వచ్చుటకు కారణము :

5వ సూత్రములోని మొదటి అక్షరము = హ

14వ సూత్రములోని చివరి అక్షరము = ల్

ఈ రెండింటిని కలుపగా వచ్చునది = హల్

ఈ సంజ్ఞ (హల్) 5వ సూత్రము నుండి ప్రారంభించి 14వ సూత్రము చివరి వరకు మధ్యలో ఉన్న అక్షరములను (క, ఖ, గ, ఘ మొదలగునవి) సూచించును. అందుచే వీటిని హల్లులు అందురు.

భాగం-4

42. సంస్కృత భాషలో సంఖ్యలలోని అంకెలు వ్రాసే పద్ధతి

సూత్రం : అంకానాం వామతో గతిః

అర్థం : అంకెలను కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు క్రమంగా వ్రాయాలి.

వివరణ : సంస్కృతంలో సంఖ్యలను వినియోగించే సందర్భంలో, సామాన్యంగా, ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను ముందుగా చెప్పి, దాని తర్వాత పదుల స్థానాన్ని, దాని తర్వాత వందల స్థానాన్ని చెబుతారు. ఈ విధంగానే మిగతా పై స్థానాల్లోని అంకెలను కూడా ఉచ్చరిస్తారు.

ఉదాహరణ 1 :

1. త్రయోదశి : మూడు కలిపిన పది అని అర్థము. అనగా, త్రయోదశి అనే పదానికి విలువ 13.
2. ఈ పదంలో ముందుగా ఒకట్ల స్థానానికి చెందిన 3 ను (త్రయ) చెప్పి, తర్వాత పదుల స్థానానికి చెందిన 1 అనే అంకె (దశ) ను చెబుతారు.
3. పైన చెప్పిన అంకెలు మొత్తం సంఖ్యలో కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు క్రమంగా కనిపిస్తాయి. ఆ విధంగా దాని విలువ 13 వస్తుంది.

ఉదాహరణ 2 :

1. 'అష్టోత్తర శతనామావళి' అనే పదాన్ని మన దేవాలయాలలో పూజలు చేయించే సందర్భాలలో వినియోగిస్తూ ఉంటాము.
2. ఈ పదము యొక్క అర్థం= 8 (అష్ట) అధికంగా కల్గిన 100 (శత)
   = 8+100 = 108
3. ఈ ఉదాహరణలో కూడ ముందుగా ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను (అష్ట=8) పలుకుతాము.
4. తర్వాత వందల స్థానానికి చెందిన 'శత' అనే పదాన్ని వినియోగిస్తాము.
5. పైన చెప్పిన అంకెలు, మొత్తం సంఖ్యలో, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు క్రమంగా కనిపిస్తాయి. ఆ విధంగా దాని విలువ 108 వస్తుంది.

43. కటపయాది విధానం - 1వ పద్ధతి

విషయం : అక్షరాల ద్వారా సంఖ్యలలోని అంకెలను సూచించుట.

వివరణ :

1. 'కటపయాది' పద్ధతిలో అక్షరాల ద్వారా అంకెలను సూచించే విధానాలు మూడు రకాలుగా ఉన్నాయి.
2. అందులో మొదటి విధానంలోని సూత్రాలు, అర్థాలు ఇక్కడ వివరించబడ్డాయి.

కటపయాది విధానం-1లోని సూత్రాలు, వాటి అర్థాలు :

కాది నవ	'క' నుండి 'ఝ' వరకు వరుసగా 9 అక్షరాలు-1 నుండి 9 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
టాది నవ	'ట' నుండి 'ధ' వరకు వరుసగా 9 అక్షరాలు-1 నుండి 9 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
పాది పంచక	'ప' నుండి 'మ' వరకు వరుసగా 5 అక్షరాలు-1 నుండి 5 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
యాద్యష్టక	'య' లగాయితు 'హ' వరకు వరుసగా 8 అక్షరాలు-1 నుండి 8 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
క్షః శూన్యమ్	'క్ష' అనే అక్షరము '0' ను సూచిస్తుంది.

3. ఈ సూత్రాలననుసరించి అక్షరాలు-వాటి విలువలు ఈ క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
క	ఖ	గ	ఘ	ఙ	చ	ఛ	జ	ఝ	
ట	ఠ	డ	ఢ	ణ	త	థ	ద	ధ	
ప	ఫ	బ	భ	మ					
య	ర	ల	వ	శ	ష	స	హ		క్ష

4. ఈ పద్ధతిలో '1' అనే అంకెను సూచించడానికి క,ట,ప,య అనే అక్షరాలలో ఏ అక్షరాన్నైనా వినియోగించవచ్చును.

5. అదే విధంగా మిగిలిన అంకెలను సూచించడానికి గుర్తించబడిన అక్షరాలు కూడ పై పట్టికలో చూపించబడ్డాయి.

6. పై పట్టికలో సూచించిన అక్షరాల యొక్క గుణింతాలు అన్నీ కూడ అదే విలువను సూచిస్తాయి.

గమనిక :

1. 'క' అని వ్రాసిననూ, 'కా' అని వ్రాసిననూ, విలువ '1' మాత్రమే గ్రహించాలి.

2. **సంస్కృత భాషలోని సంప్రదాయం ప్రకారం 'అంకానాం వామతో గతిః' - అంకెలను కుడి వైపునుండి ఎడమవైపుకు వేయాలి.**

ఉదాహరణ 1:

'జయ' అనే పదములోని అక్షరాల ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య ఎంత?

1. మహాభారతంలో 'జయ' అనే పదము అతి ప్రసిద్ధమైనది.

---

1. సంస్కృతంలో రచించబడిన మహాభారతంలో మొదటి పర్వంలో మొదటి శ్లోకం:

నారాయణం నమస్కృత్య నరంచైవ నరోత్తమమ్ ।
దేవీం సరస్వతీమ్ వ్యాసమ్ తతో జయ ముదీరయేత్ ॥

2. భగవద్గీతలోని మొదటి అధ్యాయంలోని మొదటి శ్లోకం :

ధర్మక్షేత్రే కురుక్షేత్రే సమవేతా యుయుత్సవః ।
మామకాః పాండవాశ్చైవ కిమకుర్వత సంజయ ॥

3. భగవద్గీతలోని ఆఖరి (18వ) అధ్యాయంలోని ఆఖరి శ్లోకం :

యత్ర యోగేశ్వరః కృష్ణో యత్ర పార్థో ధనుర్ధరః ।
తత్ర శ్రీర్విజయో భూతిః ధ్రువానీతిర్మతిర్మమ ॥

గమనిక : ఈ మూడు శ్లోకాలలోను కూడా ఉన్న పదం 'జయ'.

2. 'జయ' అనే పదం యొక్క విలువను ఈ క్రింది విధంగా గుర్తిస్తారు.

పై పట్టికలో అక్షరాల విలువలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

జ = 8 (ఒకట్ల స్థానం)

య = 1 (పదుల స్థానం)

3. సంస్కృత భాషలోని సంప్రదాయం ప్రకారం 'అంకానాం వామతో గతిః' – అంకెలను కుడి వైపునుండి ఎడమవైపుకు వేయాలి.

4. పై సంప్రదాయాన్ని అనుసరించి –

'జయ' అనే పదంలోని మొదటి అక్షరం 'జ' యొక్క విలువ (8) ను ఒకట్ల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

5. రెండవ అక్షరం 'య' యొక్క విలువ (1) ను పదుల స్థానంలో వేసుకోవాలి.

6. ఆ విధంగా వ్రాస్తే 18 వస్తుంది.

∴ 'జయ' అనే పదము యొక్క విలువ = 18

7. మహాభారతంలో పర్వాల సంఖ్య = 18

భగవద్గీతలో అధ్యాయాల సంఖ్య = 18

మహాభారత యుద్ధం జరిగిన రోజుల సంఖ్య = 18

కౌరవ, పాండవ సైన్యం సంఖ్య = 18 అక్షౌహిణులు

8. మహాభారతానికే ఇంకొక పేరు 'జయము'

44. కటపయాది విధానం - 2వ పద్ధతి

విషయం : అక్షరాల ద్వారా సంఖ్యలను సూచించుట

వివరణ :

కటపయాది విధానం - మొదటి పద్ధతి లో సున్న (0) ను సూచించడానికి 'క్ష' అనే అక్షరాన్ని మాత్రమే వినియోగిస్తారు. కాని కటపయాది విధానం - రెండవ పద్ధతిలో 'న', 'ఞ' అనే అక్షరాలను వినియోగించడం కనిపిస్తుంది.

సంఖ్యలను సూచించే ఈ విధానాన్ని దిగువన వివరించడం జరిగింది.

కటపయాది విధానం-2 కు సంబంధించిన శ్లోకము :

శ్లో॥ న ఞా వచశ్చ శూన్యాని
సంఖ్యాః కటపయాదయః ।
మిశ్రే తూపాంత్యహల్ సంఖ్యా
న చ చింత్యా హలః స్వరాః ॥

1. 'న', 'ఞ' అనే అక్షరాలు సున్న (0) ను సూచిస్తాయి.

2. క,ట,ప,య అనే అక్షరాలు 1 అనే అంకెను సూచిస్తాయి.

3. ద్విత్వాక్షరముగాని సంయుక్తాక్షరముగాని వచ్చినపుడు, ఆ అక్షరానికి వర్ణక్రమము చెప్పినపుడు వచ్చే ఆఖరి హల్లును తీసుకోవాలి.

4. ఉదాహరణకు 'చక్రము' అనే పదంలోని 'క్ర' అనేది సంయుక్తాక్షరము. దానికి కకార, రకార, అకారములు 'క్ర' అని వర్ణక్రమము చెబుతారు. ఇందులో వినియోగించిన హల్లులలో 'ర' కారము ఆఖరి హల్లు. అందుచేత 'క్ర' అనే సంయుక్తాక్షరానికి విలువను నిర్ణయించడానికి 'ర' అనే అక్షరం యొక్క విలువను తీసుకోవాలి.

5. ఒక అక్షరానికి ఉన్న గుణింతములు అన్నింటికి ఒకే విలువ ఉంటుంది.(అనగా, అక్షరాలలోని అచ్చులకు విడిగా విలువలు లేవు.)

'క' అని వ్రాసిననూ, 'కా' అని వ్రాసిననూ, విలువ '1' మాత్రమే గ్రహించాలి.

కటపయాది విధానం-2 లోని సూత్రాలు, వాటి అర్థాలు :

కాది నవ	'క' నుండి 'ఝ' వరకు వరుసగా 9 అక్షరాలు-1 నుండి 9 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
టాది నవ	'ట' నుండి 'ధ' వరకు వరుసగా 9 అక్షరాలు-1 నుండి 9 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
పాది పంచక	'ప' నుండి 'మ' వరకు వరుసగా 5 అక్షరాలు-1 నుండి 5 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
యాద్యష్టక	'య' లగాయితు 'హ' వరకు వరుసగా 8 అక్షరాలు-1 నుండి 8 వరకు వరుసగా అంకెలను సూచిస్తాయి.
న, ఞ శూన్యమ్	'న', 'ఞ' అనే అక్షరాలు '0' ను సూచిస్తాయి.

6. ఈ సూత్రాలననుసరించి అక్షరాలు-వాటి విలువలు ఈక్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
క	ఖ	గ	ఘ	ఙ	చ	ఛ	జ	ఝ	ఞ
ట	ఠ	డ	ఢ	ణ	త	థ	ద	ధ	న
ప	ఫ	బ	భ	మ					
య	ర	ల	వ	శ	ష	స	హ		

గమనిక :

సంస్కృత భాషలోని సంప్రదాయం ప్రకారం 'అంకానాం వామతో గతిః' - అంకెలను కుడి వైపునుండి ఎడమవైపుకు వేయాలి.

7. ఒక పదము ద్వారా ఒక సంఖ్యను తెలుపదలచుకొన్నచో, ఆ పదములోని మొదటి అక్షరము ఒకట్ల స్థానాన్ని, రెండవ అక్షరము పదుల స్థానాన్ని తెలియజేస్తాయి. అదే విధంగా తరువాతి అక్షరాలు వందలస్థానం, వేలస్థానం మొదలైన పెద్ద స్థానాలను వరుసగా తెలియజేస్తాయి.

8. ఈ సూత్రాన్ని ఈ కటపయాది విధానం-2 లో వినియోగించడం సామాన్యంగా కనిపిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 :

'రామ' అనే పదం ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య యొక్క విలువ ఎంత?

1. 'రామ' అనే పదంలో మొదటి అక్షరం 'రా'.
2. 'రా' లో అంతర్భాగమైన 'ఆ' కి విలువలేదు. 'ర' అనే అక్షరానికి ఉన్న విలువయే 'రా' అనే అక్షరానికి కూడ ఉంటుంది.
3. ఇక్కడ 'ర' అనే అక్షరం విలువ = 2
4. పై విలువ (=2) ఒకట్ల స్థానానికి చెందినది.
5. 'రామ' అనే పదంలో రెండవ అక్షరం 'మ'.
6. 'మ' అనే అక్షరం విలువ = 5
7. ఇది (=5) పదుల స్థానానికి చెందినది.
8. సంస్కృత భాషలోని సంప్రదాయం ప్రకారం 'అంకానాం వామతో గతిః' - అంకెలను కుడి వైపునుండి ఎడమవైపుకు వేయాలి.
9. పై సంప్రదాయాన్ని అనుసరించి వ్రాస్తే 52 వస్తుంది.

∴ 'రామ' అనే పదము ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య యొక్క విలువ = 52

ఉదాహరణ 2 :

'షణ్ముఖ' అనే పదం ద్వారా సూచించబడిన విలువ ఎంత?

1. మొదటి అక్షరం = ష
2. దాని విలువ = 6

3. ఇది ఒకట్ల స్థానానికి చెందిన అంకె.
4. రెండవ అక్షరం = 'ణ్ము'
5. దీని వర్ణక్రమం = ణకార, మకార, ఉకారములు
6. దీనిలో మొదటి హల్లు = ణకారము, రెండవ హల్లు = మకారము
7. 'ణ్ము' అనే అక్షరంలో గ్రహించవలసిన హల్లు = 'మ'
8. దాని విలువ = 5
9. ఇది పదుల స్థానంలోని అంకె
10. ఇచ్చిన పదంలోని ఆఖరి అక్షరం = ఖ
11. దీని విలువ = 2
12. ఇది వందల స్థానంలోని అంకె
13. ∴ 'షణ్ముఖ' అనే పదము ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య యొక్క విలువ = 256

ఉదాహరణ 3 :

'బ్రహ్మోత్సవ' అనే పదం ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య యొక్క విలువ ఎంత?

1. ఇచ్చిన పదంలోని మొదటి అక్షరం = బ్ర
2. దీని వర్ణక్రమం = బకార, రకార, అకారములు
3. ఈ అక్షరం (బ్ర) లోని ఆఖరి హల్లు = 'ర' కారము
4. దీని విలువ = 2
5. ఇది ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె
6. ఇచ్చిన పదంలోని రెండవ అక్షరం = హ్మో
7. దీని వర్ణక్రమం = హకార, మకార, ఓకారములు
8. ఈ అక్షరం (హ్మో) లోని ఆఖరి హల్లు = 'మ'
9. దీని విలువ = 5
10. ఇది పదులస్థానంలోని అంకె
11. ఇచ్చిన పదంలోని మూడవ అక్షరం = త్స

12. దీని వర్ణక్రమం – తకార, సకార, అకారములు

13. ఈ అక్షరం (త్స) లోని ఆఖరి హల్లు = 'స'

14. దీని విలువ = 7

15. ఇది వందల స్థానంలోని అంకె.

16. ఇచ్చిన పదంలోని నాల్గవ అక్షరం = వ

17. దీని విలువ = 4

18. ఇది వేల స్థానంలోని అంకె

19. ∴ 'బ్రహ్మోత్సవ' అనే పదము ద్వారా సూచించబడిన సంఖ్య యొక్క విలువ = 4752

ఉదాహరణ 4 :

జ్యామితి (Geometry) లో వినియోగించే '$\prod$' అనే సంకేతం యొక్క విలువను 32 అంకెల వరకు వర్ణించే శ్లోకం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

గోపీ భాగ్యమధువ్రాత
శృఙ్గిశోదధి సన్ధిగ ।
ఖలజీవితఖాతావ
గలమాలారసంధర ॥

ఈ అక్షరాల విలువలు ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

శ్లోకంలోని అక్షరం	గ్రహించవలసిన అక్షరం	విలువ
గో	గ	3
పీ	ప	1
భా	భ	4
గ్య	య	1

మ	మ	5
ధు	ధ	9
ర్రా	ర	2
త	త	6
శ్రు	శ	5
జ్గి	గ	3
శో	శ	5
ద	ద	8
ధి	ధ	9
స	స	7
ద్ధి	ధ	9
గ	గ	3
ఖ	ఖ	2
ల	ల	3
జీ	జ	8
వి	వ	4
త	త	6
ఖా	ఖ	2

తా	త	6
వ	వ	4
గ	గ	3
ల	ల	3
హో	హ	8
లా	ల	3
ర	ర	2
సం	స	7
ధ	ధ	9
ర	ర	2

ఇప్పుడు వచ్చిన అంకెలతో $\Pi/10$ విలువ వ్రాయవచ్చు.

$$\frac{\Pi}{10} = 0.314\ 159\ 265\ 358\ 979\ 323\ 846\ 264\ 338\ 327\ 92$$

ఈ శ్లోకంలో 'అంకానాం వామతో గతిః' అనే సూత్రాన్ని వినియోగించలేదు.

45. వేదాంతశాస్త్రంలో కటపయాది సంఖ్యలు

విషయం : శ్రీశంకరులు రచించిన ఒక స్తోత్రంలో కటపయాది విధానం-భావన

వివరణ :

శ్రీ శంకరాచార్యులవారు రచించిన ఒక శ్లోకం ఈ విధంగా ఉంది.

న తాతో న మాతా న బంధుర్న నప్తా
న పుత్రో న పుత్రీ న భృత్యో న భర్తా
న జాయా న విద్యా న వృత్తిర్మమైవ
గతిస్త్వం గతిస్త్వం త్వమేకాభవాని !

అర్థం : ఓ భవాని! నా తండ్రిగాని, తల్లిగాని, బంధువుకాని, మునిమనుమడు కాని, పుత్రుడుగాని, పుత్రికగాని, నా దగ్గరపనిచేసే భృత్యుడు గాని, నన్ను పోషిస్తున్న యజమాని గాని, నా భార్యగాని, నా చదువుగాని, నా ఉద్యోగముగాని నన్ను రక్షింపలేవు. నీవు ఒక్కతవే నాకు దిక్కు. నీవు ఒక్కతవే నాకు దిక్కు. (నన్ను రక్షించగలిగిన దానివి నీవు మాత్రమే).

విశేష వివరణ :

1. సున్న, ఒకట్లు అనే అంకెలతో ఏదైనా ఒక ద్విపద సంఖ్య ఏర్పడుతుంది.

   అదేవిధంగా లౌకిక బంధాలతోను, ఆధ్యాత్మిక (దేవునితో) బంధంతోను ఒక వ్యక్తి ఏర్పడతాడు.

2. ఈ రెండు రకాల బంధాలలోను, లౌకికమైన బంధాలన్నీ చివరకు నిరుపయోగ మైనవే. అవి అంకెలలో సున్నవంటివి.

3. పై శ్లోకంలో 'న' అనే అక్షరానికి, కటపయాది విధానంలోవలె, విలువ సున్న అని గ్రహిస్తే, తల్లి, తండ్రి, పుత్రుడు, పుత్రిక మొదలైన బంధాలన్నీ సున్నతో సమానం.

4. వ్యక్తికి ఉన్న ఆధ్యాత్మిక బంధమే చివరకు ఉపయోగకరమైనది.

అది అంకెలలో ఒకటి వంటిది.

5. పై శ్లోకంలో 'ఏకా' అనే పదానికి ఒకటి అని అర్థం తీసుకుంటే, దైవం (భవానీదేవి) మాత్రమే '1' అని అర్థం వస్తుంది.

త్వం ఏకా !

ఓ భవానీ దేవి ! నీవు ఒకటివి.

6. సంఖ్యలో '1' అనే అంకెకు ఎడమవైపున ఎన్ని సున్నలు ఉన్నా, వాటికి విలువ ఏమీలేదు. '1' అంకెకు కుడివైపున ఉన్నప్పుడే సున్నకు విలువ పెరుగుతుంది. అందుకే అంకెల వరుసకు కూడ ప్రాధాన్యత ఉంది.

7. అదే విధంగా వ్యక్తి తన బంధాలలో దైవాన్ని ముందు ఉంచుకొని, మిగిలిన లౌకిక బంధాలను తర్వాత ఉంచుకొని వరుసను నిర్ణయించుకుంటే, అతడు 'విలువ' కల్గినవాడవుతాడు.

అట్లుగాక లౌకిక బంధాలకు ప్రాధాన్యత ఇచ్చి, దైవాన్ని మరచిపోతే, లేక దానికి అతి తక్కువ ప్రాధాన్యత ఇచ్చినా, ఆ వరుసననుసరించే వ్యక్తి 'విలువ' లేనివాడవుతాడు.

అందుకే ఇక్కడ కూడ వరుసకు ప్రాధాన్యత ఉంది.

ఈ విషయాన్ని మనకు తెలియజేసే పదాలు

'త్వంగతిః, త్వం గతిః

వరుసవు నీవే ! వరుసవు నీవే ॥

46. సంగీత శాస్త్రంలో కటపయాది సంఖ్యలు

విషయం : సంగీత శాస్త్రంలో వినియోగించే కటపయాది సంఖ్యలను వివరించుట

వివరణ :

1. కర్ణాటక సంగీతంలో అతి ప్రాథమికమైన రాగాలను **మేళకర్తలు** అంటారు. వీటినే **జనకరాగాలు** అంటారు.
2. ఈ మేళకర్తల నుండియే మిగిలిన రాగాలు ఏర్పడ్డాయి. వీటిని **జన్యరాగాలు** అంటారు.
3. 16వ శతాబ్దినాటి వేంకటమఖి అనే ప్రముఖ సంగీత శాస్త్రజ్ఞుడు ప్రవేశపెట్టిన మేళకర్తరాగ పద్ధతిలో 72 మేళకర్తలను గుర్తించి, వాటికి కటపయాది విధానంలో వరుసక్రమంలో ఉండే గుర్తింపు సంఖ్యలను (Serial Numbers) ప్రతిపాదించడం జరిగింది.

   కొన్ని ఉదాహరణలు ప్రక్క పట్టిక ద్వారా ఇవ్వబడ్డాయి.

పట్టిక: కటపయాది విధానంతో మేళకర్తల పేర్లకు గుర్తింపు సంఖ్యలు

మేళకర్తల (జనకరాగాల) పేర్లు	గ్రహించబడిన మొదటి రెండు అక్షరాలు	అక్షరాల విలువలు	అంకానాం వామతో గతిః అను సూత్ర సహాయంతో కటపయాది సంఖ్య విలువ
కనకాంగి	క, న	1, 0	01
రత్నాంగి	ర, న	2, 0	02
గానమూర్తి	గ, న	3, 0	03
వనస్పతి	వ, న	4, 0	04
మాయా మాళవగౌడ	మ, య	5, 1	15
సూర్యకాంతం	స, య	7, 1	17
ఖరహరప్రియ	ఖ, ర	2, 2	22
చారుకేశి	చ, ర	6, 2	26
ధీరశంకరాభరణం	ధ, ర	9, 2	29
మేచకళ్యాణి	మ, చ	5, 6	65

47. చదరములలో
కటపయాది సంఖ్యలు-1

విషయం : కటపయాది సంఖ్యలతో చదరములలోని (గళ్లనుడి కట్లు / Magic Squares లోని) సంఖ్యలను గుర్తించుట

వివరణ :

1. క్రీ.శ. 405 సం॥లో ఆచార్య నాగార్జునుడు రచించిన 'కక్ష పుట' అనే గ్రంథంలో గళ్ళనుడి కట్లు (Magic Squares) వర్ణించబడ్డాయి. అందులో కొన్ని గళ్ళలో కటపయాది సంఖ్యా విధానంతో అక్షరాల ద్వారా అంకెలు సూచించబడ్డాయి.
2. మిగిలిన గళ్ళలోని సంఖ్యలను ఏ విధంగా గుర్తించవచ్చో కూడ ఆ గ్రంథంలో వివరించబడింది.
3. ఈ గళ్ళనుడి కట్లలో అంకెలను అడ్డు వరుసలలో కూడినను, నిలువ వరుసలలో కూడినను, మూలగా కూడినను ఒకే సంఖ్య వస్తుంది.
4. నాలుగు అడ్డవరుసలు, నాలుగు నిలువు వరుసలు (4×4) చదరంలో ఆచార్య నాగార్జునుడు ఇచ్చిన సంకేత పదాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

	అర్క		ఇందు
	నిధా		నారీ
తేన		లగ్న	
వినా		సనం	

5. ఈ గళ్ళలో సూచించబడిన పదాల యొక్క విలువలను కటపయాది విధానంతో గ్రహిస్తే ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

పదం	గ్రహించబడిన అక్షరము	కటపయాది విధానంలో గ్రహించబడిన అక్షరము యొక్క విలువ
అర్క	క	1
ఇందు	ద	8
నిధా	ధ	9
నారీ	ర	2
తేన	త	6
లగ్న	ల	3
వినా	వ	4
సనం	స	7

6. పైన విలువలను కన్గొనునపుడు, అర్క, ఇందు అనే పదములలో అచ్చులలోని అక్షరాలు (అ, ఇ) విడిచి పెట్టబడ్డాయి. అదే విధంగా నిధా, నారీ అనే పదములలో 'న' అనే అక్షరము యొక్క విలువ సున్న గనుక, తరువాత అక్షరాలు (ధ, ర) తీసుకోబడ్డాయి.
7. హల్లుల యొక్క గుణింతములన్నింటికి ఒకే విలువ తీసుకోబడింది.
8. 16 గళ్ళలోను 8 గళ్ళలో ఉండే అంకెలు ఇవ్వబడ్డాయి.
9. మిగిలిన గళ్ళలోని అంకెలను ఈ క్రింది విధంగా కన్గొనవచ్చును.
10. ఒక వరుసలోని సంఖ్యల మొత్తమును (అది నిలువుగాని, అడ్డముగాని, మూలగాని కావచ్చును) = 2m అనుకొందాము.
11. ఏ గడిని సంఖ్యతో నింపవలసి ఉంటుందో, ఆ సంఖ్యను తెలుసుకొనుటకు ఆ గడి యొక్క కర్ణములో దూరముగా ఉన్న సంఖ్యను 'm' (వరుసమొత్తంలో సగం) నుండి తీసివేయవలెను.
12. ఇదే పద్ధతితో ఇచ్చిన చదరములోని మిగిలిన అన్ని గడులను కూడ నింపవలెను.
13. ఈ సూత్రమునననుసరించి వ్రాసిన గళ్ళనుడికట్టు (Magic Square) ఈ విధంగా ఉంటుంది.

m-3	1	m-6	8
m-7	9	m-4	2
6	m-8	3	m-1
4	m-2	7	m-9

ఉదాహరణ 1 :

ఏ వరుసలోనైనా (నిలువుగాని, అడ్డముగాని, మూలగాని), మొత్తం 48 వచ్చునట్లు గళ్ళనుడికట్టులోని మిగిలిన అంకెలను కన్గొనుట.

1. వరుస మొత్తం = 2m = 48 అనుకొందాము.

   $\therefore$ m = 24

2. గళ్ళనుడికట్టు యొక్క సూత్రమును అనుసరించి తెలియని అంకెలను ఈ క్రింది విధంగా కన్గొనవచ్చును.

   m - 3 = 24 - 3 = 21
   m - 6 = 24 - 6 = 18
   m - 7 = 24 - 7 = 17
   m - 4 = 24 - 4 = 20
   m - 8 = 24 - 8 = 16
   m - 1 = 24 - 1 = 23
   m - 2 = 24 - 2 = 22
   m - 9 = 24 - 9 = 15

3. ఇప్పుడు 4 × 4 చదరము (గళ్ళనుడికట్టు) ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

21	1	18	8
17	9	20	2
6	16	3	23
4	22	7	15

48. చదరములలో
కటపయాది సంఖ్యలు - 2

విషయం : కటపయాది సంఖ్యలతో చదరములలోని (గళ్లనుడి కట్లు / Magic Squares లోని) సంఖ్యలను గుర్తించుట

వివరణ :

1. ఆచార్య నాగార్జునుడు (క్రీ.శ. 405) కటపయాది విధానంలో ఇచ్చిన ఒక చదరము (గళ్ళనుడికట్టు) లోని సంఖ్యల పేర్లు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

నీలం	చాపీ	దయా	చలో
నట	భువం	ఖరీ	వరం
రాగిణం	భూపో	నారీ	వగో
జరా	చర	నిభం	తానం

2. ఈ చదరంలో ఇచ్చిన పదాలలోని అక్షరాల విలువలు, వాటిని 'అంకానాం వామతోగతిః' అను సూత్రంతో సమన్వయం చేస్తే ఏర్పడే సంఖ్యలు ఈ క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి.

చదరంలోని పదం	అక్షరాల విలువలు	సంఖ్య విలువ
నీలం	0, 3	30
చాపీ	6, 1	16
దయా	8, 1	18
చలో	6, 3	36
నట	0, 1	10
భువం	4, 4	44
ఖరీ	2, 2	22
వరం	4, 2	24
రాగిణం	2, 3, 0	32
భూపో	4, 1	14
నారీ	0, 2	20
వగో	4, 3	34
జరా	8, 2	28
చర	6, 2	26
నిభం	0, 4	40
తానం	6, 0	06

3. ఈ సంఖ్యలతో ఏర్పడే చదరం ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

30	16	18	36
10	44	22	24
32	14	20	34
28	26	40	06

4. అడ్డ వరుసలను కలుపగా విలువ 100 వస్తుంది.

30 + 16 + 18 + 36 = 100

10 + 44 + 22 + 24 = 100

5. నిలువ వరుసలను కలిపినా, 100 వస్తుంది.

30 + 10 + 32 + 28 = 100

16 + 44 + 14 + 26 = 100

6. మూలగా కూడినపుడు కూడ 100 వస్తుంది.

30 + 44 + 20 + 06 = 100

36 + 22 + 14 + 28 = 100

గమనిక :

1. ఈ విధంగా ఏర్పడిన చదరం (Magic Squares) లోని ఆఖరి అడ్డవరుస (నాల్గవ వరుస) ను పైకి తీసుకొని వచ్చినను, లేక ఆఖరి నిలువు వరుస (నాల్గవ వరుస) ను ఎడమవైపునకు తీసికొని వచ్చినను, వరుస మొత్తం విలువ (అడ్డమైనా, నిలువైనా, మూలగానైనా) అంతే ఉంటుంది (=100). విలువ మారదు.

2. ఆఖరి అడ్డు వరుసను పైకి తీసుకొని వచ్చినపుడు చదరం పరిస్థితి.

28	26	40	06
30	16	18	36
10	44	22	24
32	14	20	34

3. పై చదరంలోని ఆఖరి నిలువు వరుసను మొదటికి తీసుకొని వచ్చినపుడు చదరం పరిస్థితి :

06	28	26	40
36	30	16	18
24	10	44	22
34	32	14	20

49. కటపయాది విధానం - 3వ పద్ధతి

విషయం : కటపయాది విధానం - 3 ద్వారా సంఖ్యల విలువలను కన్గొనుట.

వివరణ :

1. కటపయాది విధానం - మొదటి పద్ధతి లో సున్న (0) ను సూచించడానికి 'క్ష' అనే అక్షరాన్ని మాత్రమే వినియోగిస్తారు.

   కటపయాది విధానం - రెండవ పద్ధతిలో 'న', 'ఞ' అనే అక్షరాలను వినియోగించడం కనిపిస్తుంది.

   కటపయాది విధానం - మూడవ పద్ధతిని ఆర్యభట్టు తన 'ఆర్యభటీయం' అనే గ్రంథంలో వివరించాడు.

2. ఇందులో ప్రధానమైన అంశాలు :

   i. హల్లులలోని అక్షరాలకు విలువలు :

   - 'క' లగాయతు 'మ' వరకు గల అక్షరాలలోని హల్లులకు 1 నుండి 25 వరకు విలువలు ఇవ్వబడ్డాయి.
   - 'య', 'ర', 'ల', 'వ' మొదలైన అక్షరాలలోని హల్లులకు 3, 4, 5, 6 మొదలగు విలువలు ఇవ్వబడ్డాయి.

   ii. అచ్చులలోని అక్షరాలకు విలువలు :

   - క, ఖ, గ, ఘ వంటి అక్షరాలతో కలిసిన అచ్చులకు 1, 100, 10000, 1000000 మొదలగు విలువలు ఇవ్వబడ్డాయి.
   - 'య', 'ర', 'ల', 'వ' వంటి అక్షరాలతో కలిపిన అచ్చులకు 10, 1000, 100000, 10000000 మొదలగు విలువలు ఇవ్వబడ్డాయి.

3. ఈ పద్ధతిని వివరించే సూత్రము, అర్థము పట్టికలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

సూత్రం : వర్గాక్షరాణి వర్గే అవర్గే అవర్గాక్షరాణి

కాత్ ఙమౌ యః ।

ఖద్వినవకే స్వరా నవ వర్గే అవర్గే

నవాంత్యవర్గే వా ॥

అర్థం :

1. 'క' లగాయతు 'మ' వరకు గల వర్గాక్షరములను పదియొక్క 'సరి' ఘాతపు విలువలతో (Even powers of 10) వ్రాయవలెను.

2. 'య', 'ర' మొదలైన అవర్గాక్షరములను పదియొక్క బేసి ఘాతపు విలువలతో (Odd powers of 10) వ్రాయవలెను.

3. 'క' విలువ 1గా గ్రహించవలెను. మిగిలిన అక్షరములకు తరువాతి సంఖ్యలను గ్రహించాలి.

4. 'ఙ', 'మ' అను అక్షరముల విలువలను కలపగా వచ్చిన సంఖ్య అవర్గలోని మొదటి అక్షరమైన 'య' అనే అక్షరము విలువ అగును.

5. య = య్ × అ అని వ్రాయవచ్చును.

   య్ = 3

   'య్' తో కలిసే 'అ' కారము యొక్క విలువ = 10

∴ య = 3 × 10 = 30

6. తొమ్మిది అచ్చులలోని ప్రతి అక్షరమునకు రెండు రకాల ఘాతపు విలువలు ఉంటాయి. వర్గాక్షరాలను సరిఘాతపు సంఖ్యలు (Even powers of 10), అవర్గాక్షరాలను బేసి ఘాతపు సంఖ్యలు (Odd powers of 10) గుణిస్తాయి.

7. పైన చెప్పిన విషయాలను విశదీకరించే పట్టికలు ఇక్కడ ఇవ్వబడ్డాయి.

వర్గ అక్షరాలు (హల్లులు)					
	క 1	ఖ 2	గ 3	ఘ 4	ఙ 5
	చ 6	ఛ 7	జ 8	ఝ 9	ఞ 10
	ట 11	ఠ 12	డ 13	ఢ 14	ణ 15
	త 16	థ 17	ద 18	ధ 19	న 20
	ప 21	ఫ 22	బ 23	భ 24	మ 25

అవర్గ అక్షరాలు (హల్లులు)	య	ర	ల	వ	శ	ష	స	హ
	3	4	5	6	7	8	9	10

స్వరములు (అచ్చులు)	అ	ఇ	ఉ	ఋ	ఏ	ఓ	ౢ	ఐ	ఔ
వర్గ అక్షరములతో కలిసినపుడు విలువలు	10^{0}	10^{2}	10^{4}	10^{6}	10^{8}	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}
అవర్గ అక్షరములతో కలిసినపుడు విలువలు	10^{1}	10^{3}	10^{5}	10^{7}	10^{9}	10^{11}	10^{13}	10^{15}	10^{17}

ఈ పట్టికనే ఇంకొక విధముగా క్రింద చూపినట్లుగా వ్రాయవచ్చును.

వర్గాక్షరములతోను, అవర్గాక్షరములతోను కలిసే అచ్చుల విలువలు

ఋ		ఉ		ఇ		అ	
అవర్గ	వర్గ	అవర్గ	వర్గ	అవర్గ	వర్గ	అవర్గ	వర్గ
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

ఉదాహరణ 1 :

ఖ్యు ఘ్రు అనే అక్షరముల ద్వారా సూచించబడిన విలువ ఎంత?

సమాధానం :

ఖ (హల్లు) = 2

ఉ = 10000 (వర్గాక్షరములకు)

ఖు = 2×10000=20000

య (హల్లు) = 3

ఉ = 100000 (అవర్గాక్షరములకు)

యు = 3×100000=300000

ఘ (హల్లు) = 4

ఋ = 1000000 (వర్గాక్షరములకు)

ఘృ = 4×1000000=4000000

మొత్తం విలువ = ఖ్యు ఘృ = ఖు యు ఘృ

= 20000 + 300000 + 4000000 = 4320000

50. కటపయాది విధానంతో గ్రహాల భ్రమణాల సంఖ్యలు

విషయం : కటపయాది విధానం – 3వ పద్ధతితో గ్రహాల భ్రమణాల సంఖ్యలను వ్రాయుట.

వివరణ :

1. ఆర్యభట్టు ఒక మహాయుగ కాలంలో గ్రహముల భ్రమణముల సంఖ్యను తెలుపుటకు కటపయాది విధానము – 3వ పద్ధతిని అనుసరించాడు. అవి ఉదాహరణ పూర్వకంగా క్రింద వివరించబడ్డాయి.
2. కలియుగం, ద్వాపరయుగం, త్రేతాయుగం, కృతయుగంల యొక్క మొత్తం కాలపరిమితిని మహాయుగం అంటారు.

యుగం	సంవత్సరాల సంఖ్య
కలియుగం	4,32,000
ద్వాపరయుగం	8,64,000
త్రేతాయుగం	12,96,000
కృతయుగం	17,28,000
మహాయుగంలోని సంవత్సరముల సంఖ్య	43,20,000

3. జ్యోతిశ్శాస్త్రంలోని సిద్ధాంత భాగముద్వారా ఒక మహాయుగంలో (భూమి చుట్టూ) గ్రహాలు ఎన్నెన్ని సార్లు వృత్తాలను పూర్తి చేస్తాయో లెక్కించబడ్డాయి. ఆ భ్రమణాల సంఖ్యలను కటపయాది విధానం–3వ పద్ధతితో అక్షర రూపంలో వ్రాయడం జరిగింది.
4. ఆ కటపయాది సంఖ్యలను, వాటి విలువలను ఒక్కొక్క గ్రహానికి వివరించడం జరిగింది.

శని :

కటపయాది సంఖ్య : ఢు జ్వి ఘ్వ

(ఢు = 14×10^4) + (జి = 5×10^2) + (వి = 6×10^3) + (ఘ = 4×10^0) + (వ = 6×10) = 1,46,564

గురు :

కటపయాది సంఖ్య : ఖి చ్యు భ

(ఖి = 2×10^2) + (రి = 4×10^3) + (చు = 6×10^4) + (యు = 3×10^5) + (భ = 24×1) = 3,64,224

కుజ :

కటపయాది సంఖ్య : భ ద్లి ఝు ను ఖృ

(భ = 24×10^0) + (ది = 18×10^2) + (వి = 5×10^3) + (ఝు = 9×10^4) + ను = 20×10^4) + (ఖృ = 2×10^6) = 22,96,824

సూర్య:

కటపయాది సంఖ్య : ఖ్యు ఘృ

(ఖు = 2×10^4) + (యు = 3×10^5) + (ఘృ = 4×10^6) = 43,20,000

శుక్ర :

కటపయాది సంఖ్య : జ ష బి ఖు ఛృ

(జ = 8×1) + (ష = 8×10) + (బి = 23×10^2) + (ఖు = 2×10^4) + (ఛృ = 7×10^6) = 70,22,388

బుధ :

కటపయాది సంఖ్య : సు గు శి థృ న

(సు = 9×10^5) + (గు = 3×10^4) + (శి = (7×10^3) + (థృ = 17×10^6) + (న = 20×10^0) = 1,79,37,020

చంద్ర:

కటపయాది సంఖ్య : చ య గి యి జు శు ఛృ లృ

(చ = 6×10^0) + (య = 3×10^1) + (గి = 3×10^2) + (యి = 3×10^3) + (జు = 5×10^4) + (శు = 7×10^5) + (ఛృ = 7×10^6) + (లృ = 5×10^7) = 5,77,53,336

భ్రమణాల సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసుకుంటే ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

వరుస సంఖ్య	గ్రహము	ఒక మహాయుగంలో భ్రమణాల సంఖ్య
1.	శని	1,46,564
2.	గురు	3,64,224
3.	కుజ	22,96,824
4.	సూర్య	43,20,000
5.	శుక్ర	70,22,388
6.	బుధ	1,79,37,020
7.	చంద్ర	5,77,53,336

51. వారాల పేర్లు ఎట్లు వచ్చాయి?

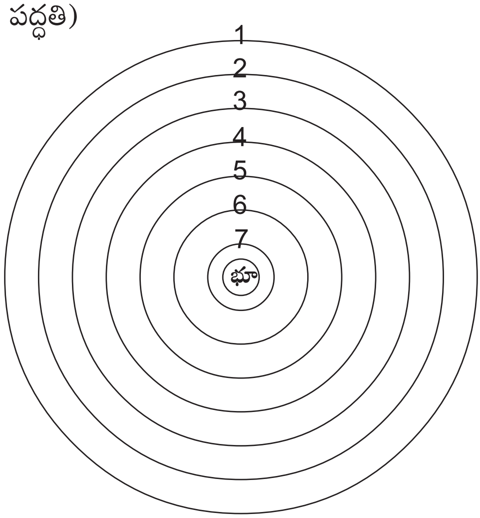
విషయం : ఆదివారం, సోమవారం మొదలైన వారాల పేర్లు, వాటి వరుసను నిర్ణయించిన విధానం.

వివరణ :

1. వారాల పేర్లు, వాటి వరుస ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో నిర్ణయించబడ్డాయి. గ్రహాల భ్రమణాల సంఖ్యకు, వాటి కక్ష్యలకు సంబంధం ఉంది. ఆ సంబంధాన్ని వర్ణించిన శ్లోకం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

భానామథః శనైశ్చర సురగురు
భౌమార్క శుక్ర బుధ చంద్రాః ।
ఏషామధశ్చ భూమిః
మేధీభూతా ఖమధ్యస్థా ॥
(ఆర్యభటీయం, కాలక్రియ)

తా॥ నక్షత్రములకు క్రింద శని, గురు, కుజ, సూర్య, శుక్ర, బుధ, చంద్రులు వారి కక్ష్యలలో తిరుగుచుందురు. వీటికి క్రిందుగా భూమి ఉండును. (భూమి కేంద్రముగా వివరించబడిన పద్ధతి)



1–శని; 2–గురు; 3–కుజ; 4–సూర్య; 5–శుక్ర; 6–బుధ; 7–చంద్ర; భూ–భూమి

2. సూర్యోదయం నుండి మరునాటి సూర్యోదయం వరకు, అనగా ఒక పగలు (అహస్సు), ఒక రాత్రి కలిసిన భాగాన్ని ఒక రోజు (అహోరాత్రం) అంటారు. దీనిని సగటున 24 సమ భాగాలుగా చేశారు. ఒక్కొక్క భాగాన్ని 'హోరా' అంటారు. (అహోరాత్రం అనే పదంలోని మధ్య రెండు అక్షరములు గ్రహించబడి, హోరా అనే పదం ఏర్పడింది.) ఒక్కొక్క హోరా యొక్క కాల వ్యవధి ఒక గంట ఉంటుంది. ఇంగ్లీషులో Hour అనే పదం ఈ హోరా పదమునుండే వచ్చిందని అంటారు. ఆ విధంగా ఒక రోజుకు 24 హోరాలు నిర్ణయించబడ్డాయి.

3. గ్రహముల కక్ష్యలకు, వాటి వేగాలకు సంబంధం ఉంది. భూమికి చాలా దూరంగా ఉన్న శని అన్ని గ్రహముల కంటెను మెల్లగా తిరుగుతుంది. శని గ్రహము వేగము కంటె గురు గ్రహము యొక్క వేగము ఎక్కువ. కాని, అది మిగిలిన వాటి వేగముల కంటె తక్కువ. ఈ విధంగా, గ్రహముల వేగములు కూడ ఈ కక్ష్యల వరుసనే ఆరోహణ క్రమంలో అనుసరించి ఉంటాయి.

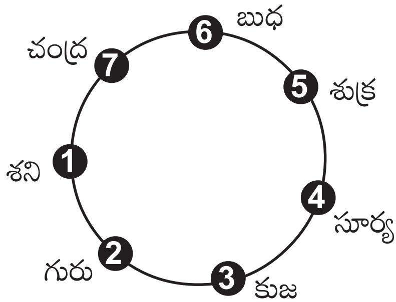
4. ఒక్కొక్క రోజుకు ఒక్కొక్క గ్రహాన్ని అధిపతిగా నిర్ణయించారు.

వారము	అధిపతి
ఆదివారము	సూర్యుడు
సోమవారము	చంద్రుడు
మంగళవారము	కుజుడు
బుధవారము	బుధుడు
గురువారము	గురుడు
శుక్రవారము	శుక్రుడు
శనివారము	శని

5. ప్రతిరోజులోను, మరల, ఒక్కొక్క హోరాకు ఒక గ్రహాన్ని అధిపతిగా నిర్ణయించారు. 24 హోరాలకు 24 మంది అధిపతులు అవుతారు. అయితే, ఉన్న గ్రహములు 7 మాత్రమే. అవి శని, గురు, కుజ, సూర్య, శుక్ర, బుధ, చంద్రులు. ఈ

ఏడుగురు 7 హోరాలకు (7 గంటలకు) ఒకసారి చొప్పున, అదే వరుసలో, అధిపతులు అవుతూ ఉంటారు. ఉదాహరణకు, ఒకరోజున మొదటి హోరాకు శని అధిపతి అనుకొందాము. అప్పుడు, తరువాత హోరాకు గురుడు, ఆ తరువాత హోరాకు కుజుడు, ఆ తరువాత హోరాకు సూర్యుడు, ఆ తరువాత హోరాకు శుక్రుడు, ఆ తరువాత హోరాకు బుధుడు, ఆ తరువాత హోరాకు చంద్రుడు అధిపతులు అవుతారు. అప్పటికి 7 హోరాలు పూర్తవుతాయి. తిరిగి ఎనిమిదవ హోరాకు శని అధిపతి అవుతాడు. అదేవిధంగా 15వ హోరాకు, 22వ హోరాకు కూడ శని అధిపతి అవుతాడు. ఈ విధంగా హోరాల అధిపతుల వరుస ఒక వృత్తాకార క్రమంలో ఉంటుంది.

6. ఈ గ్రహముల సంఖ్యలను ఒక వృత్తంలో వేస్తే ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది.



1–శని; 2–గురు; 3–కుజ; 4–సూర్య; 5–శుక్ర; 6–బుధ; 7–చంద్ర;

7. రోజుకు అధిపతి అయిన గ్రహము (వారాధిపతి) ఆరోజు సూర్యోదయ సమయానికి ఉన్న హోరాకు కూడ అధిపతి అని నిర్ణయించారు. ఆ విధంగా రోజుకు, హోరాకు, అధిపతికి సంబంధాన్ని ఏర్పాటు చేశారు.

8. ఒకరోజు సూర్యోదయ సమయానికి ఉన్న హోరాను ఒకటవ హోరాగా భావిస్తే, మరునాటి సూర్యోదయానికి ఉన్న హోరా 25వ హోరా అవుతుంది.

9. 25ను 7తో భాగిస్తే 4 శేషం వస్తుంది. దీని అర్థం – ఈ రోజు మొదటి హోరాకు అధిపతిని గుర్తిస్తే, ఈ రోజు నాల్గవ హోరా అధిపతి, మరునాడు మొదటి హోరాకు (అనగా ఈ రోజు నుండి లెక్క వేస్తే 25వ హోరాకు) అధిపతి అవుతాడు.

10. ఉదాహరణకు శనివారం నాడు ఉదయం సూర్యోదయ సమయానికి (అనగా మొదటి హోరాకు) శని అధిపతి. హోరా అధిపతులు వరుస క్రమాన్ని అనుసరిస్తే, శనివారం నాటి నాల్గవ హోరాకు అధిపతి సూర్యుడు అవుతాడు. ఈ సూర్యుడే మరునాడు ఆదివారం నాటి మొదటి హోరాకు అధిపతి అవుతాడు. ఆదివారం నాటి నాల్గవ హోరా అధిపతి చంద్రుడు. అతను తరువాతి రోజైన సోమవారం నాటి మొదటి హోరాకు అధిపతి అవుతాడు.

దీని వివరణ క్రింద పట్టిక ద్వారా తెలుస్తుంది.

వారము పేరు	1వ హోరా అధిపతి	4వ హోరా అధిపతి
శనివారము	శని	సూర్య
ఆదివారము	సూర్య	చంద్ర
సోమవారము	చంద్ర	కుజ
మంగళవారము	కుజ	బుధుడు
బుధవారము	బుధ	గురుడు
గురువారము	గురు	శుక్రుడు
శుక్రవారము	శుక్ర	శని

11. ఈ విషయాలను అన్నిటిని వివరించే శ్లోకం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

శ్లో ॥ సప్తైతే హోరేశాః శనైశ్చరాద్యాః యథాక్రమం శీఘ్రాః
శీఘ్రక్రమాచ్చతుర్థా భవంతి సూర్యోదయాత్ దినపాః ॥

తా॥ భ్రమణవేగములయొక్క ఆరోహణ క్రమంలో ఉన్న శనిగ్రహముతో ప్రారంభమైన గ్రహములు వరుసగా ఒక్కొక్క గంటకు (ఒక్కొక్క హోరాకు) అధిపతులుగా ఉంటారు. మొదటిరోజున గ్రహించబడిన గ్రహమునుండి నాల్గవ గ్రహము మరునాటి రోజుకు అధిపతి (వారాధిపతి) అవుతాడు. ఇచ్చట రోజు అనగా సూర్యోదయము నుండి లెక్కించబడిన కాల వ్యవధి.

12. ఈ విధంగా వారాల పేర్లు హోరా అధిపతుల పేర్లను బట్టి నిర్ణయించబడ్డాయి.

52. ప్రసిద్ధమైన పదములను సంఖ్యలుగా వినియోగించుట (భూతసంఖ్యా విధానము)

విషయం : ప్రసిద్ధమైన పదములకు సంఖ్యా రూపముగ విలువలను నిర్ణయించుట

వివరణ :

1. భారతీయ బీజగణితంలో రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి - మొదటిది-కటపయాది విధానము; రెండవది-భూతసంఖ్యా విధానము.
2. సంఖ్యలలోని అంకెలను అక్షరముల సహాయంతో నిరూపించడం కటపయాది విధానంలో జరుగగా, సంఖ్యలలోని అంకెలను పదముల సహాయంతో నిరూపించడం భూతసంఖ్యా విధానంలో కనిపిస్తుంది.
3. సృష్టిలో ప్రసిద్ధమైన వస్తువులకు లేక పదములకు కొన్ని విలువలతో సంబంధము ఉంది. ఈ భూతసంఖ్యా విధానంలో, ఆ ప్రసిద్ధమైన పదములను వినియోగించినపుడు వాటి విలువలను గ్రహించవలెను.
4. ఆ పదములకు నామాంతరములను లేక పర్యాయపదములను (Synonyms) కూడ అదే విలువతో వాడుట ఈ విధానంలో కనిపిస్తుంది.
5. దీనికి సంబంధించిన శ్లోకములను ముహూర్త ప్రదర్శిని అను గ్రంథమునుండి సేకరించి ఈ దిగువన ఇచ్చుట జరిగింది.

శశీ సోమశ్శశాంకశ్చ ఇందుశ్చన్ద్రః కలానిధిః ।
రాజా విధుస్సుధాంశుశ్చ యమ ఏకజనస్తథా ॥

అక్షి చక్షుః కరో నేత్రం లోచనం బాహుకర్ణకాః ।
పక్ష దృష్టి ద్వయం యుగ్మమంబకౌ నయనేక్షణే ।।

వహ్నీ రామశ్శిఖీ చాగ్నిః పావకో దహనానలౌ ।
శంకరాక్షిపురీలోకాస్త్రీణి కాలస్త్రయోగుణాః ॥

అబ్ధి సాగర చత్వారి వనరాశిర్యుగోంబుధిః ।
చతుర్వార్ధిగతిశ్చాపి జలధిర్నీరధిస్తథా ॥

ఇంద్రియం పంచమం జ్ఞానమిషుర్బాణశ్చ మార్గణః ।
వ్రతం భూతం శరః పర్వా ప్రాణశ్చ విషయస్తథా ॥

శాస్త్రం షట్చ రుచిశ్చైవ కాలశ్చ ఋతుసంజ్ఞికమ్ ।
రసద్రవ్యం చ కోశశ్చ షడ్దర్శనషడాగమౌ ॥

శైలోఽద్రిర్ద్వీపపాయుశ్చ మునిస్సప్తాచలో గిరిః ।
తురగాశ్వనగో గోత్రమహీధ్ర ఋషిసంజ్ఞికాః ॥

అష్టమం గజకర్ణీ చ దిగ్గజో దంతి హస్తి చ ।
సామజో మత్తమాతంగః దిక్పాలవసువారణాః ॥

నవమం నవరత్నం చ బ్రహ్మా చ కమలాసనః ।
నిధిర్గ్రహశ్చ ఖండం చ రంధ్రో భావశ్చ లబ్ధకః ॥

ఆకాశం గగనం శూన్యమంతరిక్షం మరుత్పథమ్ ॥

6. ఈ శ్లోకాలకు అర్థాలు ప్రక్క పట్టిక ద్వారా అందించబడ్డాయి.

ప్రసిద్ధమైన పదాలు (భూత సంఖ్యా విధానంలో)		విలువలు
ఆకాశము	అంబరము / గగనము, శూన్యము	0
చంద్ర	ఇందు / హిమకర / శశి / సోమ / కళానిధి / రాజ / విధు / సుధాంశు; యమ, ఏకజన	1
భూమి	క్ష్మా	
నేత్రములు మొ॥	చేతులు, బాహువులు, చెవులు, పక్షములు (శుక్ల & కృష్ణ)	2
అగ్ని	త్రేతాగ్నులు – ఆహవనీయ, గార్హపత్య, దక్షిణాగ్ని	3
రామ	మూడు అవతారములు – పరశురామ, శ్రీరామ, బలరామ	
పురి	త్రిపురములు	
లోకాలు	త్రిలోకాలు – స్వర్గ లోక, భూలోక, పాతాళ లోకములు	
కాలములు	భూత, వర్తమాన, భవిష్యత్ కాలములు	
గుణములు	త్రిగుణములు – సత్త్వగుణ, రజోగుణ, తమో గుణములు	
వేదములు	చతుర్వేదములు – ఋగ్వేదము, యజుర్వేదము, సామవేదము, అథర్వణ వేదము	4
యుగములు	కృత, త్రేతా, ద్వాపర, కలియుగములు	
సాగరములు	చతుస్సాగరములు – తూర్పు, దక్షిణం, పడమర, ఉత్తరం	
గతులు	చతుర్విధ గతులు	

ప్రసిద్ధమైన పదాలు (భూత సంఖ్యా విధానంలో)		విలువలు
భూతములు	పంచ మహాభూతములు – ఆకాశ, వాయు, అగ్ని, జల, పృథ్వి	5
బాణములు	మన్మథుని పంచ పుష్ప బాణములు – పద్మము, అశోకము, మామిడిపువ్వు, మల్లె, నల్ల కలువ	
పర్వములు	పంచ పర్వములు – పౌర్ణమి, అమావాస్య, కృష్ణపక్షములోని అష్టమి, చతుర్దశి, రవి సంక్రమణ దినము	
ప్రాణములు	పంచ ప్రాణములు – ప్రాణ, అపాన, వ్యాన, ఉదాన, సమానములు	
ఇంద్రియములు	పంచ కర్మేంద్రియములు, పంచ జ్ఞానేంద్రియములు	
శాస్త్రాలు	షట్శాస్త్రాలు – శిక్ష, వ్యాకరణము, కల్పము, నిరుక్తము, జ్యోతిషము, ఛందస్సు	6
రుచులు/రసములు	షడ్రుచులు–షడ్రసములు – తీపి, ఉప్పు, పులుపు, చేదు, కారము, వగరు	
ఋతువులు	షడృతువులు – వసంత, గ్రీష్మ, వర్ష, శరత్, హేమంత, శిశిరములు	
దర్శనములు	షడ్దర్శనములు – న్యాయ, వైశేషిక, సాంఖ్య, యోగ, పూర్వ మీమాంస, ఉత్తర మీమాంస	

ప్రసిద్ధమైన పదాలు (భూత సంఖ్యా విధానంలో)		విలువలు
ఆగమములు	షడాగమములు	
ఋషులు	సప్త ఋషులు – కశ్యప, అత్రి, భరద్వాజ, విశ్వామిత్ర, గౌతమ, వసిష్ఠ, వామదేవ	7
పర్వతములు	సప్త పర్వతములు, నగము / అద్రి / శైలము	
ద్వీపములు	సప్త ద్వీపములు – జంబూ, ప్లక్ష, కుశ, క్రౌంచ, శాక, శాల్వల, పుష్కర	
ఏనుగులు	అష్టదిగ్గజములు – ఐరావతము, పుండరీకము, వామనము, కుముదము, అంజనము, పుష్ప దంతము, సార్వభౌమము, సుప్రతీకము	8
వసువులు	అష్ట వసువులు – ఆపుడు, ధ్రువుడు, సోముడు, అధర్వుడు, అనిలుడు, ప్రత్యూషణుడు, అనలుడు, ప్రభాసుడు	
దిక్పాలకులు	అష్ట దిక్పాలకులు – ఇంద్ర, అగ్ని, యమ, నిరృతి, వరుణ, వాయు, కుబేర, ఈశానులు	
గ్రహములు	నవగ్రహములు – రవి, చంద్ర, కుజ, బుధ, గురు, శుక్ర, శని, రాహువు, కేతువు	9

ప్రసిద్ధమైన పదాలు (భూత సంఖ్యా విధానంలో)		విలువలు
రత్నములు	నవరత్నములు – వజ్రము, వైడూర్యము, మాణిక్యము, ముత్యము, పగడము, గోమేధికము, పుష్యరాగము, ఇంద్రనీలము, మరకతము	
నిధులు	నవనిధులు	
ప్రజాపతులు	నవ ప్రజాపతులు / నవబ్రహ్మలు మరీచి, అత్రి, అంగీరసుడు, పులస్త్యుడు, పులహుడు, క్రతువు, దక్షుడు, భృగువు, వసిష్ఠుడు	
రంధ్రములు	నవరంధ్రములు – నోరు, రెండు ముక్కు రంధ్రములు, రెండు చెవి రంధ్రములు, రెండు కన్నులు, మూత్ర రంధ్రము, అపాన రంధ్రము	
అవతారములు	దశావతారములు – మత్స్య, కూర్మ, వరాహ, నారసింహ, వామన, పరశురామ, శ్రీరామ, బలరామ, కృష్ణ, కల్కి	10
రుద్రులు	ఏకాదశ రుద్రులు – భీమ, శంభు, గిరీశ, అజైకపాద, అహిర్బుధ్ని, పినాకి, విశాంపతి, భువనాధీశ్వర, స్థాణు, కపాలి, అపరాజిత	11
ఆదిత్యులు	ద్వాదశ ఆదిత్యులు – మిత్ర, రవి, సూర్య, భాను, ఖగ, పూష, హిరణ్యగర్భ, మరీచి, ఆదిత్య, సవితృ, అర్క, భాస్కర	12

53. గుణకారములు (పావులూరి)

విషయం : పావులూరి గణితంలోని గుణకారములు

వివరణ :

1. భారతీయ గణితశాస్త్రం అనగానే కాశి, ఉజ్జయిని, పాటలీపుత్రం మొదలైన ఉత్తర భారతదేశంలోని ప్రాచీన నగరాలు గుర్తుకు వస్తాయి. కాని, దక్షిణ భారతదేశంలో కూడ గణితశాస్త్రం మూలంగా ప్రాముఖ్యతను పొందిన ప్రదేశాలు ఉన్నాయి.
2. క్రీ.శ. 9వ శతాబ్దం (814–877 ఎ.డి.) లో కర్ణాటక ప్రాంత ప్రభువైన అమోఘ వర్ష నృపతుంగ చక్రవర్తికి అస్థాన పండితుడిగా మహావీరాచార్యుడు అనే అతి ప్రముఖ గణితశాస్త్రవేత్త ఉండేవాడు. అతను గణిత సార సంగ్రహం అనే 8 అధ్యాయాల గణిత గ్రంథాన్ని సంస్కృతంలో రచించాడు. ఆ గ్రంథం ఆధారంగా వచ్చినదే పావులూరి గణితం.
3. రాజమహేంద్రవరాన్ని రాజధానిగా చేసుకుని పరిపాలించిన రాజరాజనరేంద్రుడు (10వ శతాబ్దం) పిఠాపురం సమీపంలో నవఖండవాడ అనే అగ్రహారాన్ని ఆదికవి నన్నయగారి సమకాలీకుడైన పావులూరి మల్లన అనే పండితునికి బహుమానంగా ఇచ్చాడు. అతని మనుమడు కూడ పావులూరి మల్లన అనే పిలువబడ్డాడు. ఈ పావులూరి మల్లన సుమారు క్రీ.శ.1100 లో రచించిన గణితశాస్త్ర గ్రంథం పావులూరి గణితం అనే పేరుతో ప్రసిద్ధిలో ఉంది. దీనికే దశవిధ గణితం అనే పేరు కూడ ఉంది. అతను 10 ఆధ్యాయాలతో ఈ గ్రంథాన్ని రచించినా, ఈనాడు సుమారు 3 అధ్యాయాలు మాత్రమే లభిస్తున్నాయి. ఈ గ్రంథానికి విద్వాన్ తెన్నేటి చక్కని వ్యాఖ్యానాన్ని సమకూర్చారు. వారికి ధన్యవాదములు.
4. ఈ గణిత గ్రంథంలో గుణకారాలు, భాగహారాలు మొదలైన గణిత ప్రక్రియలు అనేక పద్యాల రూపంలో వర్ణించాడు. ఇతని గణిత పద్యాలలో భూత సంఖ్యా విధానాన్ని విస్తృతంగా వినియోగించాడు. ఈ పద్ధతిలో వర్ణించబడిన సంఖ్యలలో మొదటి అంకె ఒకట్ల స్థానానికి చెందుతుంది. తరువాత వచ్చే అంకెలు పదుల స్థానం, వందల స్థానం మొదలైన స్థానాలకు క్రమంగా చెందుతాయి.

   అందులో కొన్ని ఉదాహరణలు ఇక్కడ వివరించబడ్డాయి.

ఉదాహరణ 1:

నవసంఖ్యమానికము లొక
శివలింగముపూజ కైన జెప్పుము సామో
ద్భవవసులోచనసంఖ్యకు
బ్రవిమలమగు మణులసంఖ్య భావించితగన్

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

సామోద్భవ = ఏనుగు = 8	(అష్టదిగ్గజములు) : ఒకట్ల స్థానం
వసు = 8	(అష్టవసువులు) : పదుల స్థానం
లోచన = 2	(రెండు కన్నులు) : వందల స్థానం

$\therefore$ సంఖ్య = 288

తా॥ ఒక్కొక్క శివలింగాన్ని పూజించుటకు 9 చొప్పున మణులు కావలసినచో, 288 శివలింగములకు ఎన్ని మణులు కావాలి?

$288 \times 9 = ?$

సమాధానం (ఖండ పద్ధతి) :

$288 \times 9 = 288 \times (10-1) = 2880-288 = 2592$

ఉదాహరణ 2:

ముదముతోడ నూటముప్పదితొమ్మిది
మణులు శూలి కొక్కమందిరమున
నలర బూజయైన నటు నూటతొమ్మిది
మందిరముల కెన్ని మణుల వలయు

తా॥ ఒక్కొక్క శివాలయములో 139 మణుల చొప్పున పూజ చేయదలచినచో 109 దేవాలయములకు ఎన్ని మణులు కావాలి?

139 × 109 = ?

సమాధానం :

139 × 109 = 139 × (100+9)

= 13900+1251

= 15151

విశేషాంశాలు :

1. ఈ ప్రశ్నలోని రెండు సంఖ్యలు అనగా 139 మరియు 109 అభేద్య సంఖ్యలు (Prime Numbers)

2. సమాధానంగా వచ్చిన సంఖ్య ద్విముఖ సంఖ్య, అనగా, ఎటునుంచి చూసినా ఒకే విధంగా కనిపించే సంఖ్య.

ఉదాహరణ 3:

ఒక్కొక్క శివాలయమున
కెక్కించిన పద్మసంఖ్య యిరువదియే డీ
లెక్క వసునిధినవేందుల
కెక్కించిన పద్మసంఖ్య యేర్పడజెపుమా

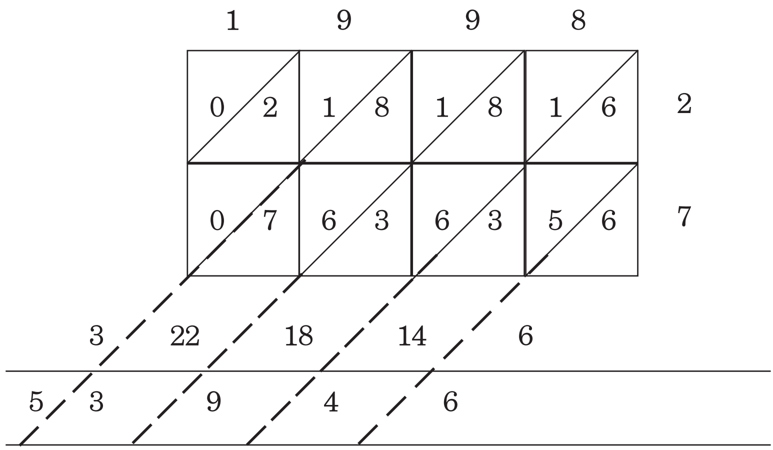
సంఖ్యలను సూచించే పదాలు-వాటి విలువలు :

వసు = 8	(అష్టవసువులు)
నిధి = 9	(నవనిధులు)
నవ = 9	
ఇందు = చంద్ర = 1	

∴ సంఖ్య = 1998

తా॥ ఒక్కొక్క శివాలయములో అర్చనకు 27 పద్మములు చొప్పున, 1998 దేవాలయాల్లో అర్చనకు ఎన్ని పద్మములు కావాలి?

1998 × 27 = ?



$\therefore 1998 \times 27 = 53946$

విశేషాంశాలు :

1. 27తో గుణించగా వచ్చిన పై సంఖ్యకు 27 కారణాంకాలు ఉండడం ఒక విశేషం.

ఉదాహరణ 4:

హిమకరవసురసగతినిధి
కమలాసనశైలనేత్రగణ మేర్పడనీ
క్రమమున నిడి శశిగతివే
దములం బెంచిన ఫలంబు దా నెంతయగున్

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు-వాటి విలువలు :

హిమకర = చంద్ర = 1

వసు = 8

రస = 6

గతి = 4

నిధి = 9

కమలాసన = ప్రజాపతి = 9

శైల = పర్వత = 7

నేత్ర = 2

∴ సంఖ్య1 = 27994681

శశి = చంద్ర = 1

గతి = 4

వేదములు = 4

∴ సంఖ్య2 = 441

తా॥ పైరెండు సంఖ్యలను గుణించినచో లబ్ధమెంత?

27994681 × 441 = ?

సమాధానం (ఖండ పద్ధతి) :

441=400+40+1

సంఖ్య 1 × 400	= 27994681× 400 =	11197872400
సంఖ్య 1 × 40	= 27994681× 40 =	1119787240
సంఖ్య 1 × 1	= 27994681× 1 =	27994681
లబ్ధం =		12345654321

విశేషాంశాలు :

1. పైన సమాధానంలో వచ్చిన లబ్ధ సంఖ్య ద్విముఖ సంఖ్యగా గుర్తించగలము (ఎటునుంచి చదివినా ఆ సంఖ్య ఒకే విధంగా ఉంటుంది.) దీనినే ప్రతిబింబ సంఖ్య, లేక మణిహార సంఖ్య అని కూడ అంటారు.

2. ఇచ్చిన సంఖ్యలు వర్గ సంఖ్యలనే విషయాన్ని గుర్తించగలము.

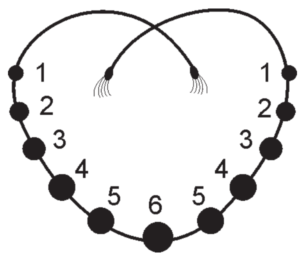
   $27994681 = 5291^2$

$441 = 21^2$

$27994681 \times 441 = 5291^2 \times 21^2 = (5291 \times 21)^2$

$= 111111^2$

3. కంఠంలో ధరించే మణులు పొదిగిన నగ (హారం) వలె మధ్య భాగం నుండి రెండు వైపులా చూస్తే ఒకే విధంగా ఉంటుందని మణిహార సంఖ్య అని పేరు పెట్టారు.



4. ఈ సంఖ్యను మహావీరుని మణిహార సంఖ్యలలో మొదటిదిగా గుర్తిస్తారు.

ఉదాహరణ 5:

సోమాంబుధి వేదసుధా
ధామాగ్ని శరంబులిడి ముదంబున శశిభలి
త్సామజి సంఖ్యను బెంచిన
నేమియగున్ దాని సంఖ్య నెఱిగింపు మిలన్.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు-వాటి విలువలు :

సోమ = చంద్ర = 1

అంబుధి = సాగరము = 4

వేద = 4

సుధాధామ = చంద్ర = 1

అగ్ని = 3

శరము = బాణము = 5

∴ సంఖ్య 1 = 531441

శశి = చంద్ర = 1

సామజి = ఏనుగు = 8

∴ సంఖ్య 2 = 81

తా॥ పైరెండు సంఖ్యలను గుణించినచో లబ్ధమెంత?

531441 × 81 = ?

సమాధానం (ఖండ పద్ధతి) :

81 = 80+1

సంఖ్య1×80 = 531441 × 80 =	42515280
సంఖ్య1×1 = 531441 × 1 =	531441
లబ్ధం =	43046721

ఉదాహరణ 6:

ఏడును నేనాళ్లును గడు
వేడుకతో నాఱుమూళ్లు వెలయగనిడి తా
రూడిగ ముప్పదిమూటను
దోడనె గుణియించి చెప్పు ధ్రువముగ మాకున్

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

ఏడు = 7

ఏనాళ్లు = 5 పర్యాయములు వేసిన 6 = 66666

ఆరుమూళ్లు = 6 పర్యాయములు వేసిన 3 = 333333

∴ సంఖ్య1 = 333333 66666 7

ముప్పది మూడు = 33

∴ సంఖ్య 2 = 33

తా॥ పైరెండు సంఖ్యలను గుణించినచో లబ్ధమెంత?

333333 66666 7 × 33 = ?

సమాధానం (ఖండ పద్ధతి) :

33 = 30+3

సంఖ్య1×30 =	1 00 000 1 00 000 10
సంఖ్య1× 3 =	10 000 0 10 000 01
లబ్ధం =	1 10 000 1 10 000 11

విశేషాంశము :

1. పైన సమాధానంలో వచ్చిన సంఖ్య కూడ మణిహార సంఖ్యయే.

ఉదాహరణ 7:

ఏడు మూడు సున్న యేడు మూడును సున్న
యేడు మూడు లెక్క లెసగ నిల్పి
మూటితోడ బెంచి ముదమున లెక్కించి
గుణనఫలము చెప్పు గణకతిలక !

గమనిక : ఈ పద్యములో రెండు సంఖ్యల యొక్క విలువలు ప్రత్యక్షముగా ఉన్నాయి. మొదటి సంఖ్యలో ఇచ్చిన అంకెలన్నియు ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభమై పెద్ద స్థానముల వైపుకు వేసుకోవలెను.

సంఖ్య1 = 370 370 37

సంఖ్య2 = 3

తా॥ ఓ గణితశాస్త్రవేత్తలలో శ్రేష్ఠుడా! పై రెండు సంఖ్యలను గుణించి లబ్ధ ఫలమును కనుగొనుము.

సమాధానం :

370 370 37 × 3 = 111 111 111

విశేషాంశము :

1. లబ్ధములో అన్నియు ఒకట్లు మాత్రమే ఉన్నాయి.

ఉదాహరణ 8:

రుద్రాంబరరుద్రాంబర
రుద్రుల వరుస నిడి శీతరుచిరంధ్రములన్
దద్రాశి బెంచి చెప్పుము
రుద్రార్చితపుష్పతిలక ! రూపేర్పడగన్ ।

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

రుద్ర = 11

అంబరము = ఆకాశము = 0

రుద్ర = 11

అంబరము = ఆకాశము = 0

రుద్ర = 11

∴ సంఖ్య1 = 110 110 11

శీతరుచి = చంద్ర = 1

రంధ్రములు = 9

∴ సంఖ్య2 =91

తా॥ పై రెండు సంఖ్యలను గుణించగా వచ్చే లబ్ధ ఫలము ఎంత?

సమాధానం :

(ఖండ పద్ధతి)

$91 = 90 + 1$

సంఖ్య1 × 90 = 110 110 11 × 90 =		990 990 990
సంఖ్య1 × 1 = 110 110 11 × 1 =		110 110 11
లబ్ధం	=	1002 002 001

విశేషాంశాలు :

1. మొదటి సంఖ్య (110 110 11) ఎటు చూసినా ఒకే విధంగా ఉంది. అందుచే ఇది ఒక కంఠాభరణ సంఖ్య.

2. మొదటి సంఖ్యను వేరొక సంఖ్య (91) తో గుణిస్తే మరింత అందమైన లబ్ధ సంఖ్య వచ్చింది. ఈ సంఖ్య కూడ రెండు వైపుల నుండి ఒకే విధంగా ఉంది. ఇది కూడ కంఠాభరణ సంఖ్య అని గుర్తించవచ్చు. అయితే, ఒక కంఠాభరణ సంఖ్య నుండి వేరొక కంఠాభరణ సంఖ్య ఏర్పడింది గనుక దానిని రాజకంఠాభరణ సంఖ్య అని అంటారు.

3. మూల గ్రంథాన్ని రచించిన మహావీరాచార్యుడు గుణకార ప్రక్రియను ఇంతటితో ముగించగా, పావులూరి మల్లన ఇంకా చాలా ఉదాహరణలను ఇచ్చాడు.

ఉదాహరణ 9 :

నగగతిగజరామేంద్రియ
గగనరససముద్రచంద్రగణ మొప్ప భువిన్
దగ నిడి భుజగగతిశ్రుతు
ల గుణించి వచింపుమా ఫలము బుధు లెన్నన్.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు-వాటి విలువలు :

నగము = పర్వతము = 7

గతి = 4

గజ = ఏనుగు = 8

రామ = 3

ఇంద్రియ = 5

గగనము = ఆకాశము = 0

రసము = రుచి = 6

సముద్ర = సాగరము = 4

చంద్ర = 1

∴ సంఖ్య1= 14 60 53 847

భుజగము = నాగము = ఏనుగు = 8

గతి = 4

శ్రుతి = వేదము = 4

∴ సంఖ్య2 = 448

తా॥ పైరెండు సంఖ్యలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధ ఫలమును తెలుపుము.

సమాధానం :

14 60 53 847 × 448 = 65 43 21 23 456

విశేషాంశము :

1. లబ్ధ సంఖ్య అనగా 65 43 21 23 456 ఎటువైపు నుండి చూసినా ఒకే విధంగా ఉన్నది. అందుచేత ఇది కూడ మణిహార సంఖ్యగా గుర్తించబడినది.

ఉదాహరణ 10:

రత్నశైలశరాగ్ని రవిపథగిరినేత్ర
గజబాహుపర్వతాకాశయుగము
నామసామజనిధివ్యోమరుద్రకరాగ్ని
శరతురగాంబరజలధివసువు
లక్షిదిగ్దంతిరామాంబరపర్వత
జలధిచక్షుస్సోమచయము నిల్పి
రత్న సంఖ్యను బెంచి ప్రౌఢకు డనగను
నుగ్గడింపవలయు నొప్పుగాను

మొదల ననులోమము విలోమము తుదనుండి
పెంచి భాగించి పెద్దలప్రియము గూర్చి
భళిభళీ యనిపొగడంగ బరగునతడు
చతురుడగువాడు సర్వజ్ఞచక్రవర్తి.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

రత్నము = 9

శైలము = పర్వతము = 7

శరము = బాణము = 5

అగ్ని = 3

రవిపథము = ఆకాశము = 0

గిరి = పర్వతము = 7

నేత్ర = 2

గజ = ఏనుగు = 8

బాహువు = 2

పర్వత = 7

ఆకాశ = 0

యుగము = 4

నామ = శాస్త్రము = 6

సామజ = ఏనుగు = 8

నిధి = 9

వ్యోమ = ఆకాశము = 0

రుద్ర = 11

కర = 2

అగ్ని = 3

శర = 5

తురగ = అశ్వము (సప్తాశ్వములు) = 7

అంబర = ఆకాశము = 0

జలధి = సాగరము = 4

వసువు = 8

అక్షి = కన్ను = 2

దిగ్దంతి = ఏనుగు = 8

రామ = 3

అంబర = ఆకాశము = 0

పర్వత = 7

జలధి = 4

చక్షు = కన్ను = 2

సోమ = చంద్ర = 1

∴ సంఖ్య1 = 124 7038 2840 7532 110 9864 0728 2703 579

రత్న = 9

∴ సంఖ్య2= 9

తా॥ పైన ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలను గుణించి లబ్ధ ఫలమును కనుగొనుము.

సమాధానం :

సంఖ్య1 × సంఖ్య2 =

124 7038 2840 7532 110 9864 0728 2703 579 × 9

= 11 22 33 44 55 66 77 88 99 88 77 66 55 44 33 22 11

విశేషాంశములు :

1. పైన వచ్చిన లబ్ధ సంఖ్యలో 34 అంకెలు గలవు.

2. ఇది కూడ రెండు వైపుల నుండి చూడగా ఒకే విధంగా ఉంది. అందుచేత దీనిని కూడ మణిహార సంఖ్య అని అంటారు.

గమనిక :

1. ఇటువంటి ద్విముఖ సంఖ్యలను ముందుగానే వ్రాసుకుని వాటికి కారణాంకములను గుర్తించి ఆ కారణాంకములలోని అంకెలను సూచించే ప్రసిద్ధ పదములను ఎన్నుకుని పద్య రూపముగ విద్యార్థుల చేత వ్రాయించ వచ్చును.

భాగం –5

54. శాశ్వత దినదర్శిని-1 (శ్రీయుత వేదగిరి)

విషయం : తేదీ ఇచ్చినచో వారము పేరు కనుగొనుట.

వివరణ :

1. కేలండర్ పద్ధతిలో తేదీలకు, వారములకు సంబంధము చూపించబడును. కాని, సామాన్యంగా ఈ కేలండర్లన్నియు ఒక్కొక్క సంవత్సరానికే లభిస్తాయి. మనకు చాలా సంవత్సరాల క్రితం నాటి ఏదైనా ఒక తేదీయొక్క వారాన్ని తెలుసుకోవాలనుకున్నప్పుడు ఆనాటి కేలండరు లభించకపోవుటచే ఇబ్బంది కలుగుట సర్వ సాధారణం. అదేవిధంగా రాబోయే కాలంలో చాలా సంవత్సరాల తరువాత ఏదైనా ఒక తేదీకి వారము కావలసి వచ్చినపుడు ఆ కేలండరు ఇంకా ప్రింటు కాకపోవుట చేతను, మనకు అందుబాటులో లేకపోవుట చేతను అసౌకర్యము కలుగుతుంది. అటువంటి సందర్భాలలో గడిచిన కొన్ని శతాబ్దాలకు రాబోయే కొన్ని శతాబ్దాలకు, ఏ తేదీ ఇచ్చినను వారాన్ని కనుగొనే పద్ధతి కొరకు చాలా మంది ప్రయత్నం చేశారు. అందులో మనకు లభ్యమైన కొన్నిటిలో శ్రీ వేదగిరి సుబ్బారాయుడు గారు (కావలి, నెల్లూరు జిల్లా) సుమారు 1952లో ప్రచురించిన ప్రతి లభించింది.

2. వేదగిరివారి పద్ధతిలో శతాబ్దములకు, సంవత్సరములకు, ఇంగ్లీషు మాసములకు, తేదీలకు, వారములకు పట్టికలను తయారు చేసి అందించారు. ఆ పట్టికలను ఇక్కడ పొందుపరచడమైనది.

3. ఈ పద్ధతిలో రెండు సంకేత పదములను వాడారు. ఈ సంకేత పదములనే అక్షరసంజ్ఞలు అంటారు.

   మొదటి సంకేత పదము, లేక, అక్షరసంజ్ఞ : శ్రీయుతవేదగిరిరామచంద్రయ్యగారు

   ఇందులో 14 అక్షరములు ఉంటాయి.

   ఒక సంవత్సరమును నాలుగు అంకెలలో చెప్పుట మామూలుగా పరిపాటి. ఉదాహరణకు 2008 అను సంత్సరంలో 4 అంకెలు ఉన్నాయి. అందులో మొదటి 2 అంకెలను బట్టి శతాబ్దాన్ని నిర్ణయిస్తారు. ఈ 2008 వ సంవత్సరం

21వ శతాబ్దానికి చెందినది. అదే విధంగా 1947వ సంవత్సరం 20వ శతాబ్దానికి చెందినది. చివరి రెండు అంకెలు ఆ శతాబ్దంలో సంవత్సర సంఖ్యను తెలియజేస్తాయి. ఒక తేదీని ఇచ్చినపుడు తేదీతో బాటు దానికి సంబంధించిన మాసమును, సంవత్సరమును కూడ ఇస్తారు.

4. మొదటి పట్టికను ఉపయోగించి, ఇచ్చిన సంవత్సరమునకు (పట్టికలో అడ్డ వరుసలో చూచుచూ) దానికి సంబంధించిన శతాబ్దమునకు (పట్టికలో నిలువ వరుసలో చూచుచూ) ఆ సంవత్సరమునకు, శతాబ్దానికి సంబంధించిన అక్షరసంజ్ఞను గుర్తించవలెను. ఇది 'శ్రీయుత వేదగిరి రామచంద్రయ్యగారు' అను పదములోని ఏదో ఒక అక్షరము అగును.

1. సంవత్సరములు & శతాబ్దముల పట్టిక

సంవత్సరములు											శతాబ్దములు			
											20	21	23	24
1	7	18	29	35	46	57	63	74	85	91	శ్రీ	గ	మ	త
2	13	19	30	41	47	58	69	75	86	97	యు	శ్రీ	ద	రా
3	14	25	31	42	53	59	70	81	87	98	త	యు	గి	మ
4	..	..	32	..	..	60	..	..	88	..	వే	య్య	గా	రు
5	11	22	33	39	50	61	67	78	89	95	ద	మ	త	శ్రీ
6	17	23	34	45	51	62	73	79	90	..	గి	ద	రా	యు
8	..	..	36	..	..	64	..	..	92	..	రి	గా	రు	వే
9	15	26	37	43	54	65	71	82	93	99	రా	త	శ్రీ	ద
10	21	27	38	49	55	66	77	83	94	00	మ	రా	యు	గి
12	..	..	40	..	..	68	..	..	96	..	చం	రు	వే	రి
16	..	..	44	..	..	72	..	..	00*	..	ద్ర	వే	రి	చం
20	..	..	48	..	..	76	..	..	..	..	య్య	రి	చం	ద్ర
24	..	..	52	..	..	80	..	..	..	..	గా	చం	ద్ర	య్య
28	..	..	56	..	..	84	..	..	..	..	రు	ద్ర	య్య	గా

పై పట్టికలో 00* అనునది లీపు సంవత్సరానికి వర్తిస్తుంది.

రెండవ సంకేత పదము, లేక, అక్షరసంజ్ఞ : వీరాంజనేయనమః

5. రెండవ పట్టికను ఉపయోగించుచూ, మొదటి పట్టిక ద్వారా లభించిన అక్షరసంజ్ఞ ఉన్న అడ్డ వరుసను, మాసమునకు చెందిన నిలువ వరుసను చూచుచూ రెండవ అక్షరసంజ్ఞను గుర్తించవలెను. ఇది "వీరాంజనేయనమః" అను పదములోని ఏదో ఒక అక్షరము అగును.

2. అక్షర సంజ్ఞలు (1) & మాసముల పట్టిక

అక్షర సంజ్ఞ	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చ్, నవంబర్	ఏప్రిల్, జులై	మే	జూన్	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్, డిసెంబర్	అక్టోబర్
శ్రీ	జ	న	న	రాం	నే	మః	య	వి	జ
యు	నే	మః	మః	జ	య	వీ	న	రాం	నే
త	య	వీ	వీ	నే	న	రాం	మః	జ	య
వే	న	రాం	జ	న	వీ	నే	రాం	య	మః
ద	వీ	నే	నే	మః	రాం	య	జ	న	వీ
గి	రాం	య	య	వీ	జ	న	నే	మః	రాం
రి	నే	మః	వీ	నే	న	రాం	మః	జ	య
రా	న	రాం	రాం	య	మః	జ	వీ	నే	న
మ	మః	జ	జ	న	వీ	నే	రాం	య	మః
చం	రాం	య	న	రాం	నే	మః	య	వీ	జ
ద్ర	మః	జ	నే	మః	రాం	య	జ	న	వీ
య్యు	య	వీ	రాం	య	మః	జ	వీ	నే	న
గా	జ	న	మః	జ	య	వీ	న	రాం	నే
రు	వీ	నే	య	వీ	జ	న	నే	మః	రాం

6. మూడవ పట్టికను ఉపయోగించుచూ, రెండవ పట్టిక ద్వారా లభించిన అక్షరసంజ్ఞ ఉన్న నిలువు వరుసను, తేదీకి చెందిన అడ్డ వరుసను చూచుచూ వారమును గుర్తించవలెను. ఇది ఇచ్చిన తేదీకి చెందిన సరియైన వారమును సూచించును.

3. అక్షర సంజ్ఞలు (2) & తేదీల పట్టిక

వీ	రాం	జ	నే	య	న	మః	తేదీలు				
ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	1	8	15	22	29
సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది	2	9	16	23	30
మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది	సోమ	3	10	17	24	31
బుధ	గురు	శుక్ర	శని	ఆది	సోమ	మంగళ	4	11	18	25	
గురు	శుక్ర	శని	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	5	12	19	26	
శుక్ర	శని	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	6	13	20	27	
శని	ఆది	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	7	12	21	28	

ఉదాహరణ 1 :

1-12-2008 ఏవారము అగును?

సమాధానం:

మొదటి పట్టికను వినియోగించుట :

1. ఇచ్చిన సంవత్సరమునకు చెందిన శతాబ్దము = 21

   సంవత్సరమును సూచించు అంకెలు = 08

   మొదటి పట్టికలో శతాబ్దమునకు, సంవత్సరమునకు చెందిన అక్షరసంజ్ఞ = **గా**

రెండవ పట్టికను వినియోగించుట :

2. మొదటి పట్టికద్వారా లభించిన అక్షరసంజ్ఞ = **గా**

   మాసము = డిసెంబర్

   రెండవ పట్టికలో, పైన చూపించిన అక్షరసంజ్ఞ (గా)కు, డిసెంబర్‌కు, చెందిన అక్షరసంజ్ఞ = **రాం**

మూడవ పట్టికను వినియోగించుట :

3. రెండవ పట్టికద్వారా లభించిన అక్షరసంజ్ఞ = **రాం**

తేది = 1

మూడవ పట్టికలో, పైన చూపించిన అక్షరసంజ్ఞ (రాం)కు, తేదీ (=1)కి, చెందిన వారము = **సోమవారము**

∴ 1–12–2008 తేదీ సోమవారము అగును.

55. శాశ్వత దినదర్శిని-2 (శకుంతలాదేవి)

విషయం : తేదీ ఇచ్చినచో వారము పేరు కనుగొనుట.

వివరణ :

1. ప్రఖ్యాత గణిత శాస్త్రవేత్త శకుంతలాదేవి తన అద్భుతమైన గణిత ప్రదర్శనలలో, ఒక విశిష్టమైన పద్ధతిలో, తేదీ ఇచ్చినచో వారము పేరును చెప్పుచుండెడిది. తన Figuring the joy of numbers అనే గ్రంథంలో ఇచ్చిన ఆ పద్ధతిని ఈ దిగువన ఉదాహరణ పూర్వకముగ వివరించడం జరిగింది.
2. ఇందులో 5 పట్టికలు ఉంటాయి.
   మొదటి పట్టికలో తేదీలకు చెందిన నాలుగు సంఖ్యలు,
   రెండవ పట్టికలో మాసములు-వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు,
   మూడవ పట్టికలో సంవత్సరములు-వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు,
   నాల్గవ పట్టికలో శతాబ్దములు-వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు,
   ఐదవ పట్టికలో వారములు-వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు ఉంటాయి.

పట్టిక-1 : తేదీలకు చెందిన నాలుగు సంఖ్యలు

7	14	21	28

పట్టిక-2 : మాసములు-వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు

మాసము	సంకేత సంఖ్య	మాసము	సంకేత సంఖ్య
జనవరి	0	జూలై	6
ఫిబ్రవరి	3	ఆగష్టు	2
మార్చి	3	సెప్టెంబర్	5
ఏప్రిల్	6	అక్టోబర్	0
మే	1	నవంబర్	3
జూన్	4	డిసెంబర్	5

పట్టిక–3 : సంవత్సరములు–వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు

సంవత్సరములు				సంకేత సంఖ్య
00	28	56	84	0
04	32	60	88	5
08	36	64	92	3
12	40	68	96	1
16	44	72		6
20	48	76		4
24	52	80		2

పట్టిక–4 : శతాబ్దములు–వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు

శతాబ్దములు	సంకేత సంఖ్య
21	6
20	0
19	2
18	4
17	6

పట్టిక–5 : వారములు–వాటికి ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యలు

వారములు	సంకేత సంఖ్య
ఆదివారము	0
సోమవారము	1
మంగళవారము	2
బుధవారము	3
గురువారము	4
శుక్రవారము	5
శనివారము	6

వారం కనుగొనే పద్ధతి :

1. ఏదైనా ఇచ్చిన తేది ఈ క్రింది విధంగా ఉంటుంది :

   dd-mm-yyyy

2. **తేదీకి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

   ఇచ్చిన తేది (dd) యొక్క విలువ 1 లగాయతు 31 లోపుగా ఉంటుంది. దీనిని 7 కంటె తక్కువగా ఉండేటట్లుగా (0 లగాయతు 6 వరకు) చేయాలి. దాని కొరకు మొదటి పట్టికలోని ఒక, తగిన అంకెను ఇచ్చిన తేదీలోనుండి తీసివేయాలి.

   తీసివేయగా వచ్చిన విలువను N1 అనుకొందాము.

3. **మాసానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

   ఇచ్చిన మాసానికి (mm) ఇవ్వబడిన సంకేత సంఖ్యను 2వ పట్టిక నుండి తీసుకోవాలి.

   దానిని N2 అనుకొందాము.

4. **సంవత్సరానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

   చివరి రెండు అంకెల సహాయంతో గుర్తించబడిన సంవత్సరపు సంఖ్యకు సరియైన సంకేతపు సంఖ్యను మూడవ పట్టిక నుండి తీసుకోవాలి.

   దానిని N3 అనుకొందాము. దీనికి సవరణను క్రింది విధముగా చేయవలెను.

5. ఇచ్చిన సంవత్సరములోని నాలుగు అంకెలలోను ఎడమ వైపున రెండు అంకెలు శతాబ్దమును గుర్తించుటకు ఉపయోగిస్తాయి. కుడి వైపున ఉన్న రెండు అంకెలు ఆ శతాబ్దములోని సంవత్సరపు సంఖ్యను సూచిస్తాయి.

6. ఇచ్చిన సంవత్సరము (yyyy) లీపు సంవత్సరము అవునో, కాదో ముందుగా నిర్ణయించు కోవాలి. (ఇచ్చిన సంవత్సరపు సంఖ్య (yyyy) 4 చేత శేషము

లేకుండగా భాగించబడినచో దానిని లీపు సంవత్సరం అంటారు. (కాని, 1900 సంవత్సరము లీపు సంవత్సరము కాదు.)

7. ఇచ్చిన సంవత్సరము **లీపు సంవత్సరము అయినచో,**

ఇచ్చిన **మాసము ఆ సంవత్సరములో జనవరిగాని, ఫిబ్రవరి గాని అయినచో**

N3 నుండి 1 తీసివేయాలి. (N3-1)

దానిని N4 అనుకోవాలి.

అట్లుగాక,

ఇచ్చిన **మాసము మిగిలిన మాసములలోనిది (అనగా, మార్చి లగాయతు డిసెంబర్ వరకు) అయినచో**

N3 ని యథాతథముగా తీసుకోవాలి.

దానినే N4 అనుకొందాము.

ఇప్పుడు 8వ స్టెప్‌కు వెళ్ళవలెను.

ఇచ్చిన సంవత్సరము **లీపు సంవత్సరము కాకున్నచో,**

i) ఇచ్చిన సంవత్సరము ముందు వచ్చిన లీపు సంవత్సరమును గుర్తించి, దానికి 3వ పట్టికలోని విలువను తీసుకోవాలి. ఈ విలువను N3 అనుకొందాము.

ii) అంతేగాక, ఇచ్చిన సంవత్సరమునకును, తీసుకొనిన లీపు సంవత్సరమునకును గల భేదమును గుర్తించాలి.

iii) పైన వచ్చిన N3 కి ఈ భేదమును కలుపవలెను.

దానిని N4 అనుకొందాము.

N4 = N3 + భేదము

8. **శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన శతాబ్దమునకు 4వ పట్టికలోని విలువను తీసుకోవాలి.

ఈ విలువను N5 అనుకొందాము.

9. ఇంతవరకు వచ్చిన N1, N2, N4, N5 లను కలుపవలెను.

10. N5 యొక్క విలువను 7 కంటె తక్కువ ఉండునట్లుగా మొదటి పట్టికలోని అనువైన సంఖ్యను తీసివేయవలెను. దీనిని N6 అనుకొందాము.

11. ఇప్పుడు 5వ పట్టికను ఉపయోగించి N6 విలువకు ఎదురుగా ఉన్న వారమును గుర్తించాలి. అదియే మన ఇచ్చిన తేదీకి సరియైన వారము అవుతుంది.

గమనిక :

1. ప్రస్తుతం మనం వాడుచున్న కేలండర్ పద్ధతి 15-10-1582 నుండి అమలులోకి వచ్చింది.
2. పైన వివరించిన పద్ధతి 15-10-1582 కంటె ముందు ఉన్న తేదీలకు వర్తించదు.

ఉదాహరణ 1 :

12-01-1863 (స్వామి వివేకానంద పుట్టినరోజు) ఏ వారం అవుతుంది?

1. తేదీకి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన తేది = 12

ఇది 7 కంటె ఎక్కువగా ఉంది.

దీనిని 7 కంటె తక్కువగా ఉండునట్లుగా చేయుటకు మొదటి పట్టికలోని 7ని తీసివేయాలి.

N1 = 12-7 = 5

2. మాసానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన మాసం = 01 = జనవరి

2వ పట్టికలో జనవరి మాసానికి ఇచ్చిన విలువ = 0

N2 = 0

3. **సంవత్సరానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం (1863)

ఇది లీపు సంవత్సరం కాదు.

ఇంతకు ముందు (1863 కంటె ముందు) వచ్చిన లీపు సంవత్సరం=1860

1860లో చివరి రెండు అంకెలు = సంవత్సరపు సంఖ్య = 60

i) 3వ పట్టికలో 60వ సంవత్సరానికి ఇచ్చిన విలువ = 5

ii) భేదం = 1863−1860 = 3

N4 = 5+3 = 8

4. **శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం = 1863

ఇది 19వ శతాబ్దానికి చెందినది.

4వ పట్టిక సహాయంతో 19వ శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన విలువ = 2

N5 = 2

5. ఇంతవరకు వచ్చిన N1, N2, N4, N5 లను కలుపవలెను.

5 + 0 + 8 + 2 = 15

ఇది 7 కంటె ఎక్కువగా ఉన్నది. మొదటి పట్టికలోని అంకెను ఉపయోగించి, దానిని 0 నుండి 6 వరకు ఉండునట్లు చేయాలి.

N6 = 15−14 = 1

6. 5వ పట్టికలో N6 (=1) కు ఎదురుగా ఉన్న వారము = సోమవారము

7. **సమాధానము:**

∴ ఇచ్చిన తేది (12-01-1863) సోమవారము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2 :

02-10-1869 (గాంధీగారు పుట్టినరోజు) ఏ వారం అవుతుంది?

1. తేదీకి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన తేది = 02

ఇది 7 కంటె తక్కువగా ఉంది.

N1 = 2

2. మాసానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన మాసం = 10 = అక్టోబర్

2వ పట్టికలో అక్టోబర్ మాసానికి ఇచ్చిన విలువ = 0

N2 = 0

3. **సంవత్సరానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం (1869)

ఇది లీపు సంవత్సరం కాదు.

ఇంతకు ముందు (1869 కంటె ముందు) వచ్చిన లీపు సంవత్సరం=1868

1868లో చివరి రెండు అంకెలు = సంవత్సరపు సంఖ్య = 68

i) 3వ పట్టికలో 68వ సంవత్సరానికి ఇచ్చిన విలువ = 1

ii) భేదం = 1869–1868 = 1

N4 = 1+1 = 2

4. **శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం = 1869

ఇది 19వ శతాబ్దానికి చెందినది.

4వ పట్టిక సహాయంతో 19వ శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన విలువ = 2

N5 = 2

5. ఇంతవరకు వచ్చిన N1, N2, N4, N5 లను కలుపవలెను.

2 + 0 + 2 + 2 = 6

ఇది 7 కంటె తక్కువగా ఉన్నది.

N6 = 6

6. 5వ పట్టికలో N6 (=6) కు ఎదురుగా ఉన్న వారము = శనివారము

7. **సమాధానము:**

∴ ఇచ్చిన తేది (02–10–1869) శనివారము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 3 :

25-09-1948 ఏ వారం అవుతుంది?

1. తేదీకి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన తేది = 25

ఇది 7 కంటె ఎక్కువగా ఉంది.

దీనిని 7 కంటె తక్కువగా ఉండునట్లుగా చేయుటకు మొదటి పట్టికలోని 21ని తీసివేయాలి.

N1 = 25 - 21 = 4

2. మాసానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :

ఇచ్చిన మాసం = 09 = సెప్టెంబర్

2వ పట్టికలో సెప్టెంబర్ మాసానికి ఇచ్చిన విలువ = 5

N2 = 5

3. **సంవత్సరానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం (1948) లీపు సంవత్సరం.

ఇచ్చిన మాసము జనవరిగాని, ఫిబ్రవరి గాని కాదు.

1948లో చివరి రెండు అంకెలు = సంవత్సరపు సంఖ్య = 48

3వ పట్టికలో 48వ సంవత్సరానికి ఇచ్చిన విలువ = 4

N4 = 4

4. **శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం = 1948

ఇది 20వ శతాబ్దానికి చెందినది.

4వ పట్టిక సహాయంతో 20వ శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన విలువ = 0

N5 = 0

5. ఇంతవరకు వచ్చిన N1, N2, N4, N5 లను కలుపవలెను.

4 + 5 + 4 + 0 = 13

దీనిని 7 కంటె తక్కువ ఉండునట్లుగా చేయాలి.

N6 = 13–7 = 6

6. 5వ పట్టికలో N6 (=6) కు ఎదురుగా ఉన్న వారము = శనివారము

7. **సమాధానము:**

∴ ఇచ్చిన తేది (25–09–1948) శనివారము అవుతుంది.

ఉదాహరణ 4 :

08–01–2008 ఏ వారం అవుతుంది?

1. **తేదీకి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన తేది = 08

ఇది 7 కంటె ఎక్కువగా ఉంది.

దీనిని 7 కంటె తక్కువగా ఉండునట్లుగా చేయుటకు మొదటి పట్టికలోని 7ని తీసివేయాలి.

N1 = 8–7 = 1

2. **మాసానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన మాసం = 01 = జనవరి

2వ పట్టికలో జనవరి మాసానికి ఇచ్చిన విలువ = 0

N2 = 0

3. **సంవత్సరానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

2008లో చివరి రెండు అంకెలు = సంవత్సరపు సంఖ్య = 08

3వ పట్టికలో 08వ సంవత్సరానికి ఇచ్చిన విలువ = 3

N3 = 3

ఇచ్చిన సంవత్సరం (2008) లీపు సంవత్సరం.

ఇచ్చిన మాసము ఆ సంవత్సరంలో జనవరి అయివున్నది.

N4 = N3-1

= 3-1

= 2

4. **శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య :**

ఇచ్చిన సంవత్సరం = 2008

ఇది 21వ శతాబ్దానికి చెందినది.

4వ పట్టిక సహాయంతో 21వ శతాబ్దానికి తీసుకోవలసిన విలువ = 6

N5 = 6

5. ఇంతవరకు వచ్చిన N1, N2, N4, N5 లను కలుపవలెను.

1 + 0 + 2 + 6 = 9

ఇది 7 కంటె ఎక్కువగా ఉన్నది.

N6 = 9−7 = 2

6. 5వ పట్టికలో N6 (=2) కు ఎదురుగా ఉన్న వారము = మంగళవారము

7. **సమాధానము:**

∴ ఇచ్చిన తేది (08−01−2008) మంగళవారము అవుతుంది.

56. శాశ్వత దినదర్శిని-3

విషయం : తేదీ ఇచ్చినచో వారము పేరు కనుగొనుట.

వివరణ :

ప్రతి సంవత్సరము విడుదల అయ్యే కేలండర్లను శాస్త్రీయ పద్ధతిలో పరిశీలిస్తే ఈ క్రింది విషయాలు బోధపడతాయి.

1. సంవత్సరములోని మొదటి తేదీకి (జనవరి 1కి), వారముల పేర్లకు గల సంబంధము :

సంవత్సరములలోని జనవరి 1వ తేదీకి, వారముల పేర్లకు ఒక పద్ధతిలో సంబంధం కనిపిస్తుంది. ఉదాహరణకు ఈ క్రింది పట్టికను గమనిద్దాం.

పట్టిక1 : జనవరి 1వ తేదీకి చెందిన వివిధ సంవత్సరములు-వాటికి చెందిన వారములు

2001	సోమవారము
2002	మంగళవారము
2003	బుధవారము
2004	గురువారము
2005	శనివారము
2006	ఆదివారము
2007	సోమవారము
2008	మంగళవారము
2009	గురువారము
2010	శుక్రవారము
2011	శనివారము
2012	ఆదివారము
2013	మంగళవారము

2. పై పట్టికను పరిశీలించగా, సంవత్సరముల సంఖ్యలు వరుసగా పెరుగుచూ లీపు సంవత్సరము వరకు జనవరి 1వ తేదికి చెందిన రోజు, ఆది, సోమ మొ။లైన వారముల పేర్లతో వరుసగా వస్తాయి.

   ఉదాహరణకు, జనవరి 1వ తేది 2001లో సోమవారముకాగా, 2002లో మంగళవారము, 2003లో బుధవారము, 2004లో గురువారము అయ్యాయి.

3. లీపు సంవత్సరము యొక్క తరువాతి సంవత్సరము జనవరి 1వ తేదీకి వచ్చు రోజు పేరు, లీపు సంవత్సరములోని జనవరి 1వ తేదీకి సంబంధించిన వారముపేరు తరువాతి 2వ వారముపేరు వచ్చును.

   ఉదాహరణకు, 2004వ సంవత్సరము లీపు సంవత్సరము అగుటచేత ఒకరోజు అదనముగా తీసుకోబడును. అందుచేత 2004వ సంవత్సరము జనవరి 1వ తేదీ గురువారము కాగా, 2005వ సంవత్సరము జనవరి 1వ తేదీ శనివారము అగుచున్నది. అనగా మధ్యలో ఉన్న శుక్రవారమును దాటవలెను.

4. మరల 2005వ సంవత్సరము లగాయతు 2008వ సంవత్సరము వరకు జనవరి 1వ తేదీనాటి వారముల పేర్లు వరుసగా వచ్చును. అనగా శని, ఆది, సోమ, మంగళ వారముల పేర్లు వరుసగా వచ్చును. కాని 2009వ సంవత్సరము జనవరి 1వ తేదీ తరువాతిదైన బుధవారము కాకుండగా గురువారము అగును.

తేదీలకు-వారముల పేర్లకు గల సంబంధము :

5. ఒక నెలలో 1వ తేదీన ఏవారము అగునో, అదే నెలలో 8, 15, 22, 29 తేదీలు కూడ అదే వారము అగును.

6. లీపు సంవత్సరము కాని సంవత్సరములో ఫిబ్రవరి నెలకు 28 రోజులు మాత్రమే ఉండును. అందుచేత ఆ సంవత్సరములో ఫిబ్రవరి 1, 8, 15, 22 తేదీలు ఏ వారమగునో, మార్చి నెలలోని 1, 8, 15, 22, 29 కూడ అదే వారము అగును.

7. లీపు సంవత్సరము అయిన సంవత్సరములో ఫిబ్రవరి నెలకు 29 రోజులు ఉండును. అందుచేత ఆ సంవత్సరములో ఫిబ్రవరి 1, 8, 15, 22 తేదీలు ఏ

వారమగునో, మార్చి నెలలోని 1, 8, 15, 22, 29 తేదీలకు తరువాతి వారము పేరు వచ్చును.

నెలలకు-వారముల పేర్లకు సంబంధము :

8. 31 రోజులు ఉన్న మాసముల (మార్చి, మే, జూలై, ఆగష్టు, అక్టోబర్, డిసెంబర్) 1వ తేదినాటి వారమును గుర్తించినచో, తరువాతి మాసము 1వ తేదీనాడు మూడవ వారము పేరు వచ్చును.

   ఉదాహరణకు, 2001వ సంవత్సరము మార్చి 1వ తేది గురువారము అయినచో, ఏప్రిల్ 1వ తేది ఆదివారము అగును. (మధ్యలో ఉన్న శుక్ర, శని వారముల పేర్లను దాటవలెను.)

9. 30 రోజులు ఉన్న మాసముల (ఏప్రిల్, జూన్, సెప్టెంబర్, నవంబర్) 1వ తేదినాటి వారమును గుర్తించినచో, తరువాతి మాసము 1వ తేదీనాడు రెండవ వారము పేరు వచ్చును.

   ఉదాహరణకు, 2001వ సంవత్సరము ఏప్రిల్ 1వ తేది ఆదివారము అయినచో, మే 1వ తేది మంగళవారము అగును. (మధ్యలో ఉన్న సోమ వారము పేరును దాటవలెను.)

10. ఈ విధముగా 2000 సంవత్సరము లగాయతు 2016 సంవత్సరము వరకు, జనవరి 1వ తేదీలు ఏవారము వచ్చునో ప్రక్క పట్టికలో చూపించబడ్డాయి. అదే విధంగా 2000 సంవత్సరము, 2001వ సంవత్సరములలో జనవరి, ఫిబ్రవరి మొదలైన మాసముల మొదటి తేది ఏ వారములలో వచ్చునో కూడ పట్టికలో చూపించబడ్డాయి. ఈ పద్ధతిలో మిగిలిన మాసాలకు కూడ వారాల పేర్లను వ్రాసుకోవచ్చును.

11. ఈ సూత్రములను దృష్టిలో పెట్టుకుని ఎన్ని సంవత్సరముల వరకైనను దినదర్శిని పట్టికలను తయారు చేసుకొనవచ్చును. (దీనిని సూచించిన శ్రీ చాగంటి సుబ్బారావు (రిటైర్డ్ హెడ్‌మాస్టర్) గారికి ధన్యవాదాలు.)

1, 8, 15, 22, 29	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
జ	శ	సో	మం	బు	గు	శ	ఆ	సో	మం	గు	శు	శ	ఆ	మం	బు	గు	శు
ఫి	మం	గు															
మా	బు	గు															
ఏ	శ	ఆ															
మే	సో	మం															
జూన్	గు	శు															
జూలై	శ	ఆ															
ఆగష్టు	మం	బు															
సెప్టె	శు	శ															
అక్టో	ఆ	సో															
నవం	బు	గు															
డిసెం	శు	శ															

57. గుణకారములు (లీలావతిలోని పద్ధతులు)

విషయం : భాస్కరాచార్యుడు లీలావతీ గణితంలో ఇచ్చిన గుణకార పద్ధతులను వివరించుట.

వివరణ :

భాస్కరాచార్యుడు సిద్ధాంత శిరోమణి అనే గ్రంథాన్ని రచించాడు. ఆ గ్రంథంలో నాలుగు భాగాలు ఉన్నాయి. అందులో మొదటి భాగం పేరు లీలావతీ గణితం. ఇందులో ఇచ్చిన గుణకారాలకు చెందిన గణిత పద్ధతులను ఉదాహరణ పూర్వకంగా ఇక్కడ వివరించడం జరిగింది.

గుణకార పద్ధతులు :

గుణకారములలో రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి.

1. క్రమగణన పద్ధతి, 2. ఉత్క్రమ గణన పద్ధతి

క్రమగణన పద్ధతి :

1. స్కూళ్ళలో నేర్పుచున్న ఈ పద్ధతి అందరికీ పరిచయమైనదే. ఈ పద్ధతిలో, గుణించే రెండు సంఖ్యలను కుడి వైపునుండి ఎడమ వైపునకు అంకె క్రింద అంకె వచ్చునట్లుగా వ్రాసుకోవాలి – అనగా ఒకట్ల స్థానం నుడి ప్రారంభించి ఎడమవైపుకు జరుగుచూ అంకెలను వేసుకోవాలి. పై సంఖ్యను గుణ్యం (Multiplicand) అంటారు. క్రింది సంఖ్యను గుణకం (Multiplier) అంటారు. గుణించగా వచ్చే ఫలితాన్ని లబ్ధం (Product) అంటారు.
2. ముందుగా, క్రింద ఉన్న సంఖ్యలో ఉన్న ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెతో పై సంఖ్యలోని అంకెలను అన్నింటిని గుణించి ఒకట్ల స్థానం లగాయతు వేసుకోవాలి.
3. రెండు అంకెలను గుణించగా రెండంకెల సంఖ్యలు వచ్చినచో, అందులోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను సరియైన స్థానంలో వేసుకోవాలి. అందులోని పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకెను ప్రక్కన ఉంచుకొని, తర్వాత రెండు అంకెలను గుణించగా వచ్చే సంఖ్యకు కలపాలి. ప్రతి అంకెను గుణించినప్పుడు ఈ నియమాన్ని పాటించాలి.

4. తర్వాత క్రింది సంఖ్యలో ఉన్న పదులస్థానంలో ఉన్న అంకెతో పై సంఖ్యలోని అంకెలను అన్నింటిని గుణించి సమాధానంలోని పదుల స్థానం లగాయతు వేసుకోవాలి.
5. ఈ విధంగా క్రింది వరుసలోని అంకెలతో పై వరుసలోని అంకెలను అన్నింటిని గుణించి స్థానాలను పెంచుకుంటూ వేసుకుంటూ వెళ్ళాలి.
6. వరుసలలో వేసుకొనిన అంకెలను అన్నింటిని కూడగా వచ్చేదే లబ్ధము.

ఉదాహరణ1 : 125 × 12 = ?

125ని 12చేత గుణించడం.

```
 135
  12
----
 270
135
----
1620
----
```

ఉత్క్రమ గుణన పద్ధతి :

1. ఇందులో గుణించే రెండు సంఖ్యలను ఎడమవైపునుండి ప్రారంభించి కుడివైపుకు జరుగుచూ అంకె క్రింద అంకె వచ్చునట్లుగా వ్రాసుకోవాలి.
2. క్రింది సంఖ్యలోని ఎడమవైపున ఉన్న అంకెతో, పై సంఖ్యలోని అంకెలను గుణిస్తూ ఎడమవైపునుండి కుడివైపుకు వేసుకు వెళ్ళాలి.
3. గుణించగా వచ్చే ఫలితాలను సరైన స్థానాలలో వేసుకుంటూ వెళ్ళి, చివరగా అన్ని వరుసలను కూడగా వచ్చేదే లబ్ధము.

ఉదాహరణ 2: 135 × 12 = ?

i) 12వ ఎక్కము వచ్చినచో చేయు పద్ధతి :

```
   135
   12
 ------
   12
    36
     60
 ------
   1620
 ------
```

ii) ఒక్కొక్క అంకెతో గుణించి వేసుకునే పద్ధతి

```
   135
   12
 ------
   135
    270
 ------
   1620
 ------
```

గుణకార పద్ధతులు :

లీలావతీ గణితంలో 5 గుణకార పద్ధతులు ఉన్నాయి.

1. రూపవిధి 2. ఖండవిధి 3. విభాగవిధి 4. స్థానవిధి 5. ఇష్టసంఖ్యావిధి

వాటి వివరణ క్రింది విధంగా ఉంది.

1. రూపవిధి

ఈ పద్ధతి మనకు పరిచయం ఉన్నదే. ఇందులో సంఖ్యలను కుడివైపు నుండి ఎడమ వైపునకు వేసుకుని, అదే వరుసలో అంకెలను గుణించుకొనుచూ కూడాలి.

$135 \times 12 = ?$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 12 \\ \hline 1620 \\ \hline \end{array}$$

2. ఖండ విధి

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను, ఒక సంఖ్యను రెండు ఖండములుగా చేసి గుణకారాన్ని సాధించుకొనవలెను.

$135 \times 12 = ?$

$12 = 6+6$

$$\begin{array}{r} 135 \\ 6 \\ \hline 810 \\ +\ 810 \\ \hline 1620 \\ \hline \end{array}$$

3. విభాగవిధి

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను, ఒక సంఖ్యను రెండు విభాగములుగా చేసి గుణకారాన్ని సాధించుకొనవలెను.

$135 \times 12 = ?$

$12 = 6 \times 2$

$$\begin{array}{r} 135 \\ \times 6 \\ \hline 810 \\ \times 2 \\ \hline 1620 \\ \hline \end{array}$$

4. స్థానవిధి

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను, ఒక సంఖ్యను సౌకర్యముగా ఉండు రెండు భాగములుగా చేసి గుణకారాన్ని సాధించుకొనవలెను.

$135 \times 12 = ?$

$12 = 10 + 2$

$135 \times 10 = 1350$

$135 \times 2 \;\;= \;\;270$

$$\begin{array}{r} \hline 1620 \\ \hline \end{array}$$

5. ఇష్ట సంఖ్యా విధి

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలోను, ఒక సంఖ్యలో ఒక భాగమును ఇష్ట సంఖ్యగా భావించి, దానిని బట్టి రెండవ భాగమును కూడ నిర్ణయించి గుణకారాన్ని సాధించుకొనవలెను.

$135 \times 12 = ?$

$12 = 15 - 3$

$$\begin{array}{rr} 135 \times 15 & = 2025 \\ (-)\ 135 \times 3 & = \ \ 405 \\ \hline & 1620 \\ \hline \end{array}$$

గమనిక :

1. పై పద్ధతులలో కొన్ని పద్ధతులు నిత్య జీవితంలో చాలా మంది చాలా సందర్భాలలో వినియోగిస్తూనే ఉంటారు.

2. పైన వివరించిన వాటిలో కొన్ని పద్ధతులు చాలా సారూప్యతతో ఉన్నాయి.

ఈ పద్ధతులలో గుణకారమును సాధించ వలసినదిగా చెప్పిన శ్లోకము లీలావతీ గణితంలో ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నది.

శ్లో॥ బాలే బాలకురంగలోలనయనే లీలావతి ప్రోచ్యతాం
పంచత్ర్యేకమితా దివాకరగుణా అంకాః కతి స్స్యు ర్యది ।
రూపస్థానవిభాగఖండగుణనే కల్యాసి కళ్యాణిని
ఛిన్నాస్తేన గుణేన తే చ గుణితా జాతాః కతి స్స్యు ర్వద ॥

తా॥ పిల్లలేడి యొక్క చలించు కనులవంటి కనులు గలిగిన బాలికా! లీలావతీ! కళ్యాణీ! నీవు రూపవిభాగ గుణకారములందును, స్థాన విభాగ గుణకారముల యందును, ఖండ గుణనమందును సమర్ధురాలవగుచూ 135 అనే సంఖ్యను 12 చేత గుణించిన ఎంత వచ్చునో చెప్పుము.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

మొదటి సంఖ్య :

పంచ = 5

త్రి = 3

ఏక = 1

అంకానాం వామతో గతిః అను సూత్రమును అనుసరించి

సంఖ్య 1 = 135

రెండవ సంఖ్య :

దివాకర = సూర్యుడు = 12

సంఖ్య2 = 12

135 × 12 = ?

చేసిన గుణకారము సరియైనదా, కాదా అని నిర్ణయించుట

రెండు సంఖ్యలను వివిధములైన పద్ధతులతో గుణించినపుడు వచిన లబ్ధము సరియైనదా, కాదా అని చెప్పుటకు ఈ క్రింది విధానమును వినియోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 1:

5368 × 346 = 1857328

స్టెప్ 1

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన మొదటి సంఖ్య = 5368

ఇందులోని అంకెలను అన్నింటిని కలుపగా వచ్చే విలువ = 5+3+6+8=22

ఈ 22లోని అంకెలను కలుపగా వచ్చు విలువ = 2+2=4

స్టెప్ 2

గుణకారము కొరకు ఇచ్చిన రెండవ సంఖ్య = 346

ఇందులోని అంకెలను అన్నింటిని కలుపగా వచ్చే విలువ = 3+4+6 =13

ఈ 13లోని అంకెలను కలుపగా వచ్చు విలువ = 1+3=4

స్టెప్ 3

ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల విలువలను (స్టెప్1లోను, స్టెప్2 లోను వచ్చిన విలువలు) గుణించాలి.

4 × 4 = 16

ఈ 16లోని అంకెలను కలుపగా వచ్చు విలువ = 1+6=7

స్టెప్ 4

గుణకారము చేయగా వచ్చిన సంఖ్య = 1857328

ఇందులోని అంకెలను అన్నింటిని కలుపగా వచ్చే విలువ =

1+8+5+7+3+2+8 =34

ఈ 34లోని అంకెలను కలుపగా వచ్చు విలువ = 3+4=7

స్టెప్ 5

స్టెప్3 లోను (గుణించుటకు తీసుకొనిన సంఖ్యలలోని అంకెలను కలుపగా వచ్చిన విలువ), స్టెప్4 లోను (గుణించగా వచ్చిన లబ్ధ సంఖ్యలోని అంకెలను కలుపగా వచ్చిన విలువ) వచ్చిన విలువలు రెండూ కూడ ఒకే అంకెను (7) సూచిస్తున్నాయి. అందుచేత ఇచ్చిన సంఖ్యలకు వచ్చిన లబ్ధము సరియైనదే అని నిర్ణయించవచ్చును.

58. భాస్కరాచార్యుని విద్వత్తు

భాస్కరాచార్యుని విద్వత్తును వర్ణించే శ్లోకం ఈ క్రింది విధంగా ఉంది.

అష్టవ్యాకరణాని షట్చ భిషజాం వ్యాచష్టతాః సంహితాః
షట్ తర్కాన్ గణితాని పంచ చతురో వేదాన్ విధీతే స్మ యః ।
రత్నానాం త్రితయం ద్వయం చ బుబుధే మీమాంసయోరంతరం
సద్బ్రహ్మైకమగాధబోధమహిమా సోఽస్యాః కవిర్భాస్కరః ॥

వ్యాకరణాలు	8
వైద్య సంహితలు	6
దర్శన శాస్త్రములు	6
గణితములు	5 (పౌలిశ, రోమశ, వాసిష్ఠ, సౌర, పైతామహ)
వేదాలు	4
రత్న శాస్త్రములు	3
మీమాంసా శాస్త్రములు	2
	34

భాస్కరాచార్యుడు శాలివాహన శకం 1036లో (క్రీ.శ.1108) లో జన్మించినట్లును, 36వ యేట సిద్ధాంత శిరోమణి అనే గ్రంథాన్ని రచించినట్లు ఈ క్రింది శ్లోకం వలన తెలుస్తోంది.

రసగుణపూర్ణమహీసమశకనృపకాలే భవన్మమోత్పత్తిః।
రసగుణవర్షేణ మయా సిద్ధాంతశిరోమణీ రచితా ॥

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

పుట్టిన సంవత్సరము–సంఖ్య :

రసము = 6

గుణము = 3

పూర్ణము = 0

మహీ = భూమి = 1

∴ సంఖ్య = 1036 (శాలివాహన శకము) (క్రీ.శ. 1108)

గ్రంథమును రచించే సమయానికి అతని వయస్సు :

రసము = 6

గుణము = 3

సంఖ్య = 36

∴ గ్రంథమును రచించే సమయానికి అతని వయస్సు = 36 సంవత్సరాలు.

59. భాగహారములు-5 (39 మరియు 49 మొ॥ సంఖ్యలతో)

సూత్రం : ఏకాధికేన పూర్వేణ

గమనిక : సమాధానాన్ని ఎడమవైపు నుండి కుడి వైపుకు వ్రాయు పద్ధతి.

వివరణ : 1/19, 1/29 భిన్నములకు భాగహారములు-1 అను ప్రకరణంలో వివరించిన పద్ధతియే 1/39, 1/49 మొదలైన భిన్నములకు వర్తిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 :

1/39 = ?

1. ప్రాతిపదిక=4; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 2 5 6 4 1
1 2 2 1

∴ 1/39 = . 0 2 5 6 4 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 6

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

0 2 5
6 4 1
―――
6 6 6
―――

ఉదాహరణ 2 :

1/49 = ?

1. ప్రాతిపదిక=5; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 2 0 4 0 8 1 6 3 2 6 5 3 0 6 1 2 2 4 4 8
1 2 4 3 1 1 3 2 1 3 1 1 2 2 4 4

9 7 9 5 9 1 8 3 6 7 3 4 6 9 3 8 7 7 5 5 1
3 4 2 4 4 1 3 3 1 2 3 4 1 4 3 3 2 2

∴ 1/49 =

. 0 2 0 4 0 8 1 6 3 2 6 5 3 0 6 1 2 2 4 4 8

9 7 9 5 9 1 8 3 6 7 3 4 6 9 3 8 7 7 5 5 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 42

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

```
. 0 2 0 4 0 8 1 6 3 2 6 5 3 0 6 1 2 2 4 4 8
  9 7 9 5 9 1 8 3 6 7 3 4 6 9 3 8 7 7 5 5 1
  -----------------------------------------
  9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
  -----------------------------------------
```

ఉదాహరణ 3 :

1/59 = ?

1. ప్రాతిపదిక=6; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

```
.  0  1  6  9  4  9  1  5  2  5  4  2  3  7  2  8  8  1  3
 1  4   5  2  5     3  1  3  2   1  2  4   1  5  4     2  3

  5  5  9  3  2  2  0  3  3  8  9  8  3  0  5  0  8  4  7
 3   5   1  1  1    2    2  5  5  4  1     3      5  2   4  2
  4  5  7  6  2  7  1  1  8  6  4  4  0  6  7  7  9  6  6  1
 3   4  3  1  4      1   5  3  2  2      4   4  4  5  3  3
```

∴ 1/59 =

. 0 1 6 9 4 9 1 5 2 5 4 2 3 7 2 8 8 1 3

5 5 9 3 2 2 0 3 3 8 9 8 3 0 5 0 8 4 7

4 5 7 6 2 7 1 1 8 6 4 4 0 6 7 7 9 6 6 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 58

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

. 0 1 6 9 4 9 1 5 2 5 4 2 3 7 2 8 8 1 3 5 5 9 3 2 2 0 3 3 8
 9 8 3 0 5 0 8 4 7 4 5 7 6 2 7 1 1 8 6 4 4 0 6 7 7 9 6 6 1

 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9

ఉదాహరణ 4 :

1/69 = ?

1. ప్రాతిపదిక=7; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 1 4 4 9 2 7 5 3 6 2 3 1 8 8 4 0 5 7 9 7 1
 1 3 3 6 1 5 3 2 4 1 2 1 6 5 2 4 5 6 4

∴ 1/69 =

. 0 1 4 4 9 2 7 5 3 6 2 3 1 8 8 4 0 5 7 9 7 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 22

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

. 0 1 4 4 9 2 7 5 3 6 2
 3 1 8 8 4 0 5 7 9 7 1

 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

ఉదాహరణ 5 :

1/79 = ?

1. ప్రాతిపదిక=8; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 1 2 6 5 8 2 2 7 8 4 8 1

1 2 5 4 6 1 2 6 6 3 6

∴ 1/79 =

. 0 1 2 6 5 8 2 2 7 8 4 8 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 13

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సమానముగా సర్దుట వీలుకాదు.

ఉదాహరణ 6 :

1/89 = ?

1. ప్రాతిపదిక=9; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5 6 1 7 9 7 7 5 2 8 0 8

1 1 2 3 5 8 4 4 5 5 1 7 8 6 6 4 2 7 8 8

9 8 8 7 6 4 0 4 4 9 4 3 8 2 0 2 2 4 7 1 9 1

7 7 6 5 3 4 4 8 3 3 7 1 2 2 4 6 1 8

∴ 1/89 =

. 0 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5 6 1 7 9 7 7 5 2 8 0 8

9 8 8 7 6 4 0 4 4 9 4 3 8 2 0 2 2 4 7 1 9 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 44

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

. 0 1 1 2 3 5 9 5 5 0 5 6 1 7 9 7 7 5 2 8 0 8

9 8 8 7 6 4 0 4 4 9 4 3 8 2 0 2 2 4 7 1 9 1

---

9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9

ఉదాహరణ 7 :

1/99 = ?

1. ప్రాతిపదిక=10; సూత్రమును ఉపయోగించగా వచ్చిన అంకెలు

. 0 1

1

∴ 1/99 =

. 0 1

2. సమాధానంలో వచ్చిన మొత్తం అంకెలు = 2

3. సమాధానంలో వచ్చిన అంకెలను రెండు వరుసలలో సర్దగా ఈ క్రిందివిధంగా ఉండును.

. 0

1

1

గమనిక :

పై సమాధానాలన్నిటిలోను ఉన్న అంకెలు మరల మరల పునరావృతం అవుతాయి.

60. అభేద్య సంఖ్యలు

సూత్రం : లోపనాస్థాపనాభ్యామ్

అర్థం : సంఖ్యలను గమనిస్తూ వదలుట, ఉంచుట ద్వారా అభేద్య సంఖ్యలను గుర్తించుట

వివరణ :

1. 1 కాక మిగిలిన కారణాంకములు లేని సంఖ్యలను గుర్తించుటకు ఈ సూత్రాన్ని వినియోగిస్తారు.
2. 1 లగాయతు 100 వరకు మధ్యలో గల అభేద్య సంఖ్యలను ఈ క్రింది విధంగా గుర్తించవచ్చును.
3. కొందరు 1ని Prime Numbers గా తీసుకొనరు. కాని శకుంతలాదేవి 1ని కూడ Prime Number గా తీసుకొనినది.
4. 2ను మొదటి అభేద్య సంఖ్యగా తీసుకుంటారు.
5. సరి సంఖ్యలన్నిటికీ 2 కారణాంకము గనుక ఆ సంఖ్యలు అభేద్య సంఖ్యలుగా గుర్తించబడవు.
6. ప్రతి బేసి సంఖ్యకు అంతకు ముందు వచ్చిన బేసి సంఖ్యలు కారణాంకములు అగునేమో పరిశీలించాలి. ఆ విధంగా కారణాంకములు లేని సంఖ్యలను అభేద్య సంఖ్యలుగా గుర్తిస్తారు.

ఉదాహరణ:

1 లగాయతు 100 వరకు మధ్యలో గల అభేద్య సంఖ్యలు :

2	3	5	7
11	13	17	23
31	41	43	53
59	61	67	71
79	89	97	

61. వేదములో 19, 29, 39, 49 వంటి సంఖ్యల ప్రస్తావన

19, 29, 39, 49 మొదలైన సంఖ్యలను యజుర్వేదములో ఒకచోట వర్ణించుట జరిగింది. వాటి పేర్లు ఈ దిగువన ఇవ్వబడ్డాయి.

19	ఏకాన్నవిగ్ంశత్యై స్వాహా
29	నవవిగ్ంశత్యై స్వాహా
39	ఏకాన్న చత్వారిగ్ంశతే స్వాహా
49	నవచత్వారిగ్ంశతే స్వాహా
59	ఏకాన్నషష్ట్యై స్వాహా
69	నవషష్ట్యై స్వాహా
79	ఏకాన్నాశీత్యై స్వాహా
89	నవాశీత్యై స్వాహా
99	ఏకాన్న శతాయ స్వాహా

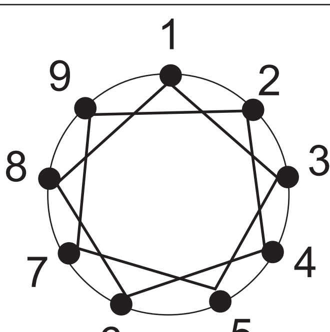
(తైత్తిరీయ సంహిత 7.2.14)

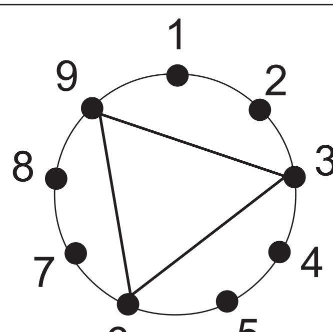
62. అంకెలు-లక్షణాలు & సంఖ్యలు-స్వభావాలు-1

విషయం : 2, 3, 4 మొదలైన అంకెల ఎక్కముల ద్వారా వచ్చే సంఖ్యల స్వభావాన్ని విశ్లేషించుట.

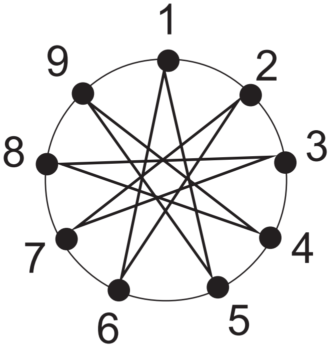
వివరణ : పిల్లల చేత ఎక్కములు చదివిస్తూ ఉంటాం. ఆ వచ్చిన ఫలిత సంఖ్యలలోని అంకెలను కలపగా వచ్చిన అంకెలలో ఒక లయబద్ధత కనిపిస్తుంది. ఆ అంకెలు మరల మరల ఆవృతం అవుతూ ఉంటాయి. దీనిని చిత్ర రూపంగా చూస్తే అపూర్వమైన విశేషాలు కనిపిస్తాయి. అందులో కొన్నిటిని ఇక్కడ ఉదాహరణ పూర్వకంగా వివరించడం జరిగింది.

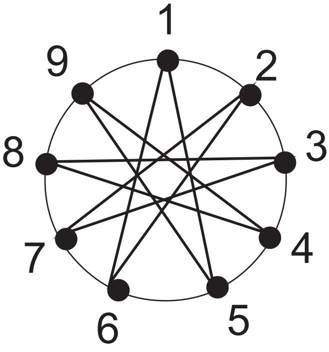
2 x 1 = 2 - 2	3 x 1 = 3 - 3
2 x 2 = 4 - 4	3 x 2 = 6 - 6
2 x 3 = 6 - 6	3 x 3 = 9 - 9
2 x 4 = 8 - 8	3 x 4 = 12 - 3
2 x 5 = 10 - 1	3 x 5 = 15 - 6
2 x 6 = 12 - 3	3 x 6 = 18 - 9
2 x 7 = 14 - 5	3 x 7 = 21 - 3
2 x 8 = 16 - 7	3 x 8 = 24 - 6
2 x 9 = 18 - 9	3 x 9 = 27 - 9
2 x 10 = 20 - 2	3 x 10 = 30 - 3
2 x 11 = 22 - 4	3 x 11 = 33 - 6
2 x 12 = 24 - 6	3 x 12 = 36 - 9



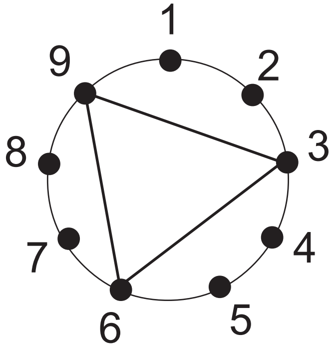


4	x	1	=	4	-	4	5	x	1	=	5	-	5
4	x	2	=	8	-	8	5	x	2	=	10	-	1
4	x	3	=	12	-	3	5	x	3	=	15	-	6
4	x	4	=	16	-	7	5	x	4	=	20	-	2
4	x	5	=	20	-	2	5	x	5	=	25	-	7
4	x	6	=	24	-	6	5	x	6	=	30	-	3
4	x	7	=	28	-	1	5	x	7	=	35	-	8
4	x	8	=	32	-	5	5	x	8	=	40	-	4
4	x	9	=	36	-	9	5	x	9	=	45	-	9
4	x	10	=	40	-	4	5	x	10	=	50	-	5
4	x	11	=	44	-	8	5	x	11	=	55	-	1
4	x	12	=	48	-	3	5	x	12	=	60	-	6

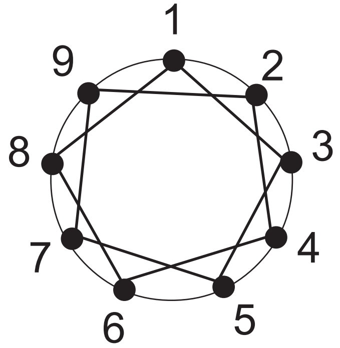




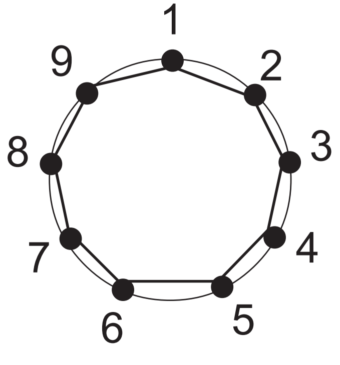
6	x 1	=	6	-	6
6	x 2	=	12	-	3
6	x 3	=	18	-	9
6	x 4	=	24	-	6
6	x 5	=	30	-	3
6	x 6	=	36	-	9
6	x 7	=	42	-	6
6	x 8	=	48	-	3
6	x 9	=	54	-	9
6	x 10	=	60	-	6
6	x 11	=	66	-	3
6	x 12	=	72	-	9



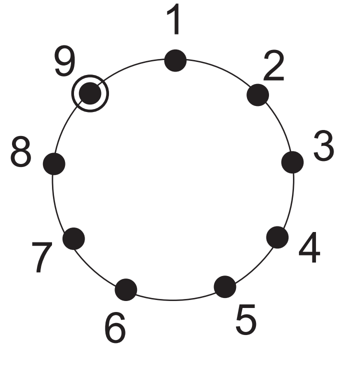
7	x 1	=	7	-	7
7	x 2	=	14	-	5
7	x 3	=	21	-	3
7	x 4	=	28	-	1
7	x 5	=	35	-	8
7	x 6	=	42	-	6
7	x 7	=	49	-	4
7	x 8	=	56	-	2
7	x 9	=	63	-	9
7	x 10	=	70	-	7
7	x 11	=	77	-	5
7	x 12	=	84	-	3



8	x	1	=	8	-	8
8	x	2	=	16	-	7
8	x	3	=	24	-	6
8	x	4	=	32	-	5
8	x	5	=	40	-	4
8	x	6	=	48	-	3
8	x	7	=	56	-	2
8	x	8	=	64	-	1
8	x	9	=	72	-	9
8	x	10	=	80	-	8
8	x	11	=	88	-	7
8	x	12	=	96	-	6



9	x	1	=	9	-	9
9	x	2	=	18	-	9
9	x	3	=	27	-	9
9	x	4	=	36	-	9
9	x	5	=	45	-	9
9	x	6	=	54	-	9
9	x	7	=	63	-	9
9	x	8	=	72	-	9
9	x	9	=	81	-	9
9	x	10	=	90	-	9
9	x	11	=	99	-	9
9	x	12	=	108	-	9



గమనిక :

1. పై పద్ధతిని ఉపయోగించి 1వ ఎక్కమునకు కూడ వేయవచ్చును.

2. ఈ ఎక్కములలోని వివరాలను సంక్షిప్తంగా ఈ క్రింది విధంగా చూడవచ్చును.

ఎక్కము	మరల ఆవృతం అవుతున్న అంకెలు (Recurring Digits)
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
2	2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9
3	3, 6, 9
4	4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9 (4 3 2 1 9 8 7 6 5)
5	5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9 (5 6 7 8 9 1 2 3 4)
6	6, 3, 9
7	7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 9
8	8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9
9	9

3. పై పట్టికలో చూపిన విధముగా, ఈ క్రింది ఎక్కములలో వచ్చిన అవే అంకెలు ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమాలలో ఉన్నాయి.

1--8 3--6

2--7 4--5

4. 9వ ఎక్కమునకు ఒక్క అంకె (9) మాత్రమే ఆవృతం అవుతుంది.

63. వేదాంత శాస్త్రములో అంకెలు-వాటి సంకేతాలు

విషయం : వేదాంత శాస్త్రంలో అంకెలకు సంబంధించిన సంకేతాలు.

వివరణ :

1. వేదాంత శాస్త్రములో సంఖ్యల యొక్క వినియోగము చాల విస్తృతముగా కనిపిస్తుంది.

2. సచ్చిదానంద స్వరూపుడైన పరమాత్మను 1తో సూచిస్తారు.

3. పరమాత్మలో నుండి బహిర్గతమైన శక్తినే మాయ, లేక, అవిద్య, లేక, అవ్యక్తము అనే పేర్లతో సంబోధిస్తారు. దీనిని 2తో సూచిస్తారు.

నిత్యము పరమాత్మను ఆశ్రయించుకుని ఉండే ఈ మాయాశక్తి తన శక్తితో సృష్టి నిర్వహిస్తుంది. ఈ విషయాన్ని ఈ క్రింది శ్లోకం ద్వారా తెలుసుకోవచ్చును.

యదవిద్యా విలాసేన భూత భౌతిక సృష్టయః ।
తన్నౌమి పరమాత్మానం సచ్చిదానంద విగ్రహమ్ ॥

(వేదాంత పరిభాష 1-1)

తా॥ సచ్చిదానంద విగ్రహుడైన పరమాత్మను నిత్యము ఆశ్రయించుకుని ఏ అవిద్య (మాయాశక్తి) పంచతన్మాత్రలు లగాయతు సృష్టినంతను నిర్వహించునో, ఆ పరమాత్ముని కి నా నమస్కారములు.

4. ఈ మాయాశక్తి సృజించిన మహత్తును 3 అనే అంకెతోను, అహం (ఉన్నాను అనే భావమును) 4 అంకెతోను సూచిస్తారు.

5. దీని తర్వాత, పంచ మహాభూతములను 5 లగాయతు 9 వరకు అంకెలతో సూచిస్తారు. (ఆకాశము-5, వాయువు-6, తేజస్సు-7, జలము-8, పృథ్వి-9)

64. అంకెలు-లక్షణాలు & సంఖ్యలు-స్వభావాలు-2 (పావులూరి)

సంఖ్య: 1

1 నుండి 9 వరకు ఆరోహణ క్రమంలోను, అవరోహణ క్రమంలోను ఉన్న రెండు సంఖ్యలను కలుపుచూ, అదనంగా 1ని కూడ కూడితే, అన్నీ ఒకట్లు ఉన్న సంఖ్య వస్తుంది.

$$
\begin{array}{r}
123456789 \\
987654321 \\
+1 \\
\hline
1111111111 \\
\hline
\end{array}
$$

సంఖ్య: 3

సహజ సంఖ్యలలో (Natural Numbers) మొదట్లో ఉన్న సంఖ్యల మధ్య సంబంధపు విలువలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

$2^2-1^2=3$

$3^2-2^2=5$

సంఖ్య 153

$1^3+5^3+3^3 = 153$

ఇందులో ఉన్న ఒకొక్క అంకెకు ఘాతం (=3) ను చేసి కలపగా సమాధానంలో ఆ మూడు అంకెలు మాత్రమే ఉండే సంఖ్య వస్తుంది.

సంఖ్య: 7

7 అనే అంకెకు 14 28 57కు సంబంధము :

7×2^1	$= 7\times2$	=	14
7×2^2	$= 7\times4$	=	28
7×2^3	$= 7\times8$	=	56
7×2^4	$= 7\times16$	=	1 12
7×2^5	$= 7\times32$	=	2 24
7×2^6	$= 7\times64$	=	4 48
7×2^7	$= 7\times128$	=	8 96
7×2^8	$= 7\times256$	=	17 9 2
7×2^9	$= 7\times512$	=	3 5 84
			14 28 57 14 28 57 14 2(7 84)

పై సంఖ్యలో 14 28 57 అనే పదం రెండు సార్లు కనిపిస్తోంది.

142 అనే పదం మూడు సార్లు కనిపిస్తోంది.

సంఖ్య : 14 28 57

ఈ సంఖ్య పావులూరి గణితంలో ఒక పద్యంలో కనిపిస్తుంది.

గుణగతిశశిగిరిశరవా
రణనేత్రపయోధిశీతరశ్మలు గిరులన్
గుణితంబు చేసి చెప్పుము
మణివిరచితశూలికంఠమాలిక వచ్చున్

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు–వాటి విలువలు :

గుణము = 3

గతి = 4

శశి = చంద్ర = 1

గిరి = పర్వతము = 7

శరము = బాణము = 5

వారణము = ఏనుగు = 8

నేత్రము = 2

పయోధి = 4

శీతరశ్మి = చంద్ర = 1

∴ సంఖ్య1 = 142857143

గిరి = పర్వతము = 7

∴ సంఖ్య2 = 7

తా॥ పైరెండు సంఖ్యలను గుణించినచో వచ్చే లబ్ధము ఈశ్వరునికి అలంకరించు మణిహారము వంటి సంఖ్య కాగలదు.

142857143 × 7 = ?

సమాధానం (ఖండ పద్ధతి) :

7 = 1+2+4

సంఖ్య1×1 = 14 28 57 143

సంఖ్య1×2 = 28 57 14 286

సంఖ్య1×4 = 57 14 28 572

లబ్ధం = 1 00 00 00 001

విశేషాంశాలు :

1. మొదటి సంఖ్యను 1తోను, 2తోను, 4తోను గుణించగా వచ్చిన సంఖ్యలలో, చివరి మూడు అంకెలను వదలి పరిశీలిస్తే, 14; 28; 57 అనే జంటలు చక్రీయంగా తిరిగి ఆవృత్తి కావడం ఒక ఆసక్తికరమైన అంశం.
2. లబ్ధ సంఖ్య కూడ ద్విముఖ ప్రతిబింబ సంఖ్య
3. ఈ వచ్చిన లబ్ధమునకు కారణాంకములు 11, 13, 19, 52579.
4. పై కారణాంకములు నాలుగును అభేద్య సంఖ్యలే.

5. 14 28 57 ×1 = 14 28 57

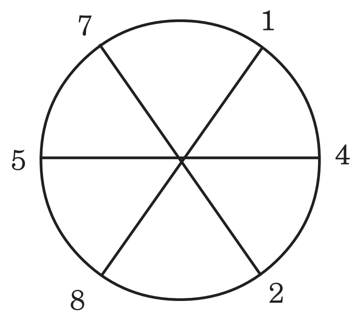
   14 28 57 ×2 = 28 57 14

   14 28 57 ×3 = 42 85 71

   14 28 57 ×4 = 57 14 28

   14 28 57 ×5 = 71 42 85

   14 28 57 ×6 = 85 71 42



   14 28 57 ×7 = 99 99 99

పై మొదటి ఆరు సంఖ్యలలోను 1,4,2,8,5,7 అనే సంఖ్యలు చక్రీయ పద్ధతిలో ఆవృతమవుతున్నాయి.

కాని 7 తో గుణిస్తే మొత్తం అన్నీ 9లే వస్తాయి.

సంఖ్య : 9

1. 9వ ఎక్కములోని మొదటి ఐదు వరుసలలోను వచ్చిన సంఖ్యలకు ప్రతిబింబ సంఖ్యలు మిగిలిన ఐదు వరుసలలోను కనిపిస్తాయి.

1 × 9 = 09	90 = 10 × 9
2 × 9 = 18	81 = 10 × 9
3 × 9 = 27	72 = 8 × 9
4 × 9 = 36	63 = 7 × 9
5 × 9 = 45	54 = 6 × 9

2. ఇచ్చిన సంఖ్యకు దాని ప్రతిబింబ సంఖ్యకు గల భేదంలోని అంకెలను కలుపగా 9 వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 :

ఇచ్చిన సంఖ్య	78645
ప్రతిబింబ సంఖ్య	54687
భేదం	23958

భేదంలోని అంకెల మొత్తం = 2+3+9+5+8 →27→2+7→9

3. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం = 7+8+6+4+5 →30→3+0→3

4. ఇచ్చిన సంఖ్యనుండి 30ని తీసివేయగా వచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను కలుపగా 9 వస్తుంది.

   78645−30 = 78615

   7+8+6+1+5 →27→2+7→9

5. ఇచ్చిన సంఖ్యనుండి 3 ని తీసివేయగా వచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను కలుపగా 9 వస్తుంది.

78645−3 = 78642

7+8+6+4+2 →27→2+7→9

6. 8 అనే అంకె లేకుండగా 1 నుండి 9 వరకు అంకెలు ఉన్న సంఖ్యను 9 తో గుణిస్తే అన్నీ ఒకట్లు ఉన్న సంఖ్య వస్తుంది.

12345679 × 9 = 111111111

దీని సహాయంతో కొన్ని పెద్ద సంఖ్యలతో గుణకారములు సులభంగా చేయవచ్చు.

18 = 9×2 ∴ 12345679×18 = 111111111×2 = 222222222

27 = 9×3 ∴ 12345679×27 = 111111111×3 = 333333333

36 = 9×4 ∴ 12345679×36 = 111111111×4 = 444444444

ఇదే విధంగా మిగిలిన సంఖ్యలు కూడ గుణకారములు సాధించవచ్చును.

7. రెండు అంకెలను వాడుచూ వచ్చే పెద్ద సంఖ్య ఏది?

అంకెలలో పెద్ద అంకె = 9

ఇచ్చిన లెక్క యొక్క సమాధానము కొరకు 9ని రెండు సార్లు వాడాలి.

కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారము, ఘాతము అనే ప్రక్రియలలో ఘాతము పెద్ద సంఖ్యను ఇస్తుంది.

∴ సమాధానము = 9^9 = 9×9×9×9×9×9×9×9×9

= 387420489

8. మూడు అంకెలను వాడినప్పుడు వచ్చే పెద్ద సంఖ్య ఏది?

అంకెలలో పెద్ద అంకె = 9

ఇచ్చిన లెక్క యొక్క సమాధానము కొరకు 9ని మూడు సార్లు వాడాలి.

కూడిక, తీసివేత, గుణకారము, భాగహారము, ఘాతము అనే ప్రక్రియలలో ఘాతము పెద్ద సంఖ్యను ఇస్తుంది.

∴ సమాధానము = $9^{9^9} = 9^{387420489}$

ఈ సంఖ్యకు సమాధానంలో మొదట్లో ఈ క్రింది అంకెలు వస్తాయి.

428124773

సమాధానములో సుమారు 36 కోట్ల 90 లక్షల అంకెలు వస్తాయి.

దీనిని వ్రాయడానికి సుమారు 800 కిలోమీటర్ల పొడవుగల కాగితం అవసరం అవుతుంది.

దానిని చదవడానికి ఎన్ని సంవత్సరాలు పడుతుందో కదా!

65. నిశ్శేష భాగహారములు

విషయం : ఒక సంఖ్యను (లవమును), ఇంకొక సంఖ్య (హారము) నిశ్శేషముగా భాగించునా లేదా అనుదానిని త్వరితముగా నిర్ణయించుట.

వివరణ :

1. ఒక సంఖ్యను ఇంకొక సంఖ్యతో పూర్తి భాగహారమును చేసినచో నిశ్శేషముగా భాగించునా లేదా అనునది సాధారణంగా తెలియును. కాని, పూర్తి భాగహారము చేయకుండగా సంఖ్య యొక్క లక్షణాల ద్వారా కొంతవరకు చెప్పవచ్చును. అది ఇక్కడ వివరించబడింది.

1 చేత అన్ని సంఖ్యలు భాగించబడతాయి.

2 చేత అన్ని సరిసంఖ్యలు నిశ్శేషముగా భాగించబడతాయి.

3 చేత లవములోని అంకెల మొత్తము 3 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడితే, ఇచ్చిన సంఖ్య 3 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ1: 618 అనే సంఖ్యను 3 నిశ్శేషముగా భాగిస్తుందా?

618లోని అంకెల మొత్తం = 6+1+8 → 15→ 1+5→ 6

6ని 3 నిశ్శేషముగా భాగిస్తుంది గనక 618ని 3 నిశ్శేషముగా భాగిస్తుంది.

4 చేత ఇచ్చిన సంఖ్యలో కుడి చివరి రెండు సంఖ్యలు 4 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడితే, ఇచ్చిన సంఖ్య 4 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

5 చేత చివరి అంకె 0గాని, 5గాని అయితే, ఇచ్చిన సంఖ్య 5 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

6 చేత i) చివరి అంకె సరిసంఖ్య అయి,

ii) అంకెల మొత్తం 3 చేత భాగించబడితే,

ఇచ్చిన సంఖ్య 6 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

7 చేత i) (ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె × 5 + పదుల స్థానంలోని అంకె) 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడితే,

లేక

ii) (ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె × 5), పదులు, వందల స్థానంలో ఉన్న సంఖ్యను కలుపగా వచ్చిన సంఖ్య 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడితే, ఇచ్చిన సంఖ్య 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ2 : 98

8 × 5 = 40 + 9 = 49/7 = 7

∴ 98 అనే సంఖ్య 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ3 : 896

6×5 = 30+89 = 119

9×5=45+11=56

56 → 6×5 = 30+5=35

∴ 896 అనే సంఖ్య 7 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

8 చేత భాగించబడుట

ఇచ్చిన సంఖ్యలోని చివరి మూడు అంకెలు 8 చేత భాగించబడితే, ఇచ్చిన సంఖ్య 8 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ4 : 9520

520/8 = 65

∴ 9520 అనే సంఖ్య 8 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

9 చేత భాగించబడుట

i) ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలన్నింటిని కలిపితే 9 వస్తే, ఇచ్చిన సంఖ్య 9 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడుతుంది.

ఉదాహరణ5 : 727

727 = 7+2+7=16

1+6 → 7

727 అనే సంఖ్య 9 చేత నిశ్శేషముగా భాగించబడదు.

భాగం –6

66. భాగహారములు -6 (పాటీ గణితం)

విషయం:- పాటీగణితం

వివరణ : యూరప్‌లోని గణిత శాస్త్రజ్ఞులు 15వ శతాబ్దం వరకు కూడ, భాగహారం చాలా క్లిష్టమైన ప్రక్రియ అనీ, దానికి గణిత ప్రావీణ్యం కావాలనీ భావించేవారు. కాని భారతదేశంలో భాగహారాలు చేయడం ఆ నాటికే చాలా ప్రసిద్ధిలో ఉంది. అందుచేత మన గణిత శాస్త్రజ్ఞులు దీనిని తమగ్రంథాల్లో పేర్కొనేవారే తప్ప వివరించడం మానేశారు.

వ్రాత సౌకర్యాలు తక్కువగా ఉన్న ఆ రోజుల్లో భాగహారాలను ఇసుకబల్లపై చేసేవారు. ఆ పద్ధతిని "పాటీపద్ధతి" అనేవారు.

ఆ పద్ధతిలో భాగహారాన్ని ఒక భిన్నంగా వేసుకొనేవారు. పై అంకెలోను, క్రింది అంకెలోను సమానంగా పోయే ఒకే అంకెతో భాగించడాన్ని అపవర్తనం అనేవారు. దీనిని ఒక ఉదాహరణ ద్వారా వివరించడం జరుగుతోంది.

ఉదాహరణ : 2576÷16=?

వివరణ	భాగించవలసిన సంఖ్యలు		శేషం	భాగఫలం	భాగఫల పంక్తి
	ప్రస్తుతం	తర్వాత			
ఇచ్చిన సంఖ్య 2576 లోని '25' ను 'ప్రస్తుతం' శీర్షిక క్రిందను '76'ను 'తర్వాత' శీర్షిక క్రిందనూ వ్రాయాలి.					
ఇప్పటి స్థితి	25	76			
ఇచ్చిన విభాజకము '16'ను 25 క్రింద వ్రాయవలెను					
ఇప్పటి స్థితి	25 16	76			

25ను 16తో భాగించి 'శేషం' 'భాగఫలము'లను వ్రాయాలి					
ఇప్పటి స్థితి			9	1	
భాగఫలమును భాగఫల పంక్తిలో జేర్చి వ్రాయాలి					
ఇప్పటి స్థితి			9	1	1
ఇప్పుదు "ప్రస్తుతం" శీర్షిక క్రింద ఉన్న 25 స్థానంలో, శేషం'9'నూ "తర్వాత" శీర్షిక క్రింద ఉన్న 76లోని'7'నూ 'ప్రస్తుతం' శీర్షిక క్రిందప్రక్క ప్రక్కన వ్రాయాలి.					
ఇప్పటి స్థితి	97 16	6			1
97 ను 16తో భాగించి, శేషం, భాగఫలం వ్రాయాలి.					
ఇప్పటి స్థితి			1	6	1
క్రొత్తగా వచ్చిన '6'ను భాగఫల పంక్తిలో జేర్చివ్రాయాలి.					
ఇప్పటి స్థితి	97 16		1	6	16

ఇప్పుడు 'ప్రస్తుతం' శీర్షిక క్రింద ఉన్న 97స్థానంలో శేషం 1ను, 'తర్వాత' శీర్షిక క్రింద ఉన్న '6'ను 'ప్రస్తుతం' శీర్షిక క్రింద ప్రక్కప్రక్కన వ్రాయాలి.					
ఇప్పటిస్థితి	16 16				
16ను 16తో భాగించి 'శేషం' 'భాగఫలములను' వ్రాయాలి.					
ఇప్పటిస్థితి			0	1	16
భాగఫలాన్ని భాగఫల పంక్తిలో జేర్చి వ్రాయాలి.					
ఇప్పటి స్థితి					161

ఈ విధంగా భాగహారాలను సాధించేవారు. కాలక్రమంలో ఈ పద్ధతికి బదులు ఒక్కొక్క అంకెనే దించుకుంటూ భాగహారాన్ని సాధించే ప్రక్రియ వచ్చింది. అది మన దేశంనుండి అరబ్బులకు, వారిద్వారా యూరప్‌కు చేరింది.

67. భాగహారములు-7 (పావులూరి ఉదాహరణలు)

విషయం : పావులూరి గణితంలోని ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ 1 :

ఎనిమిది వేలును నూఱును
నెనయగ దొంబదియు రెండు హేమంబులు సే
కొని యఱువది నలువుర కిడ
గ నందు నొక్కనికి నెన్ని గణితవిధిజ్ఞా !

సంఖ్య1 = 8000+100+92=8192

సంఖ్య2= 64

తాత్పర్యం ॥ 8192 సువర్ణాలను 64 మందికి పంచితే, ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని వస్తాయి?

8192/64 = ?

సమాధానం :- 8192/64 = 1024/8 = 128

ఒక్కొక్కరికి 128 సువర్ణాలు వస్తాయి.

ఉదాహరణ 2 :

చంద్రనేత్ర వహ్ని జలనిధి శరరస
భూతగతి గుణాక్షి శీతరశ్మి
సంఖ్యహేమచయము శశివేదగతిసంఖ్య
బాలుగొన్న నేకభాగమెంత?

సంఖ్య 1కు సంబంధించిన సంఖ్యలను సూచించే పదాలు – వాటి విలువలు :

చంద్ర = 1

నేత్ర = 2

వహ్ని = 3

జలనిధి = 4

శర = 5

రస = 6

భూత = 5

గతి = 4

గుణ = 3

అక్షి = 2

శీతరశ్మి = చంద్ర = 1

సంఖ్య 1 = 12345654321

సంఖ్య 2కు సంబంధించిన సంఖ్యలను సూచించే పదాలు – వాటి విలువలు :

శశి = 1

వేద = 4

గతి = 4

సంఖ్య 2 = 441

తాత్పర్యం ॥ పైన వ్రాసిన మొదటి సంఖ్య (సంఖ్య 1)ను రెండవసంఖ్య (సంఖ్య2) చే భాగించిన, భాగఫలము ఎంత వచ్చును?

$$\frac{\mathbf{12345654321}}{\mathbf{441}} = ?$$

విశేషవివరణ :

ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని 1 నుండి 6 వరకు అంకెలు ఉండి, ఆ పైన ఒక్కొక్కటి తగ్గుతూ పోయే సంఖ్యలో బంగారునాణాలు ఉన్నాయి. వీటిని 441 మంది పంచుకుంటారు. ఒక్కొక్కరికి ఎన్ని వస్తాయి?

ఇక్కడి మొదటి సంఖ్య (= సంఖ్య 1) అయిన 12345654321 అనునది ద్విముఖ కంఠహారసంఖ్య.

$$441=21\times21 = 3\times7\times3\times7$$

సమాధానం $= \dfrac{12345654321}{441} = \dfrac{12345654321}{3x7x3x7} = 27994681$

గమనిక

$$441 = 21^2$$
$$27994681 = 5291^2$$
$$12345654321 = 21^2 x\ 5291^2 = (21 x\ 5291)^2 = 11\ 11\ 11^2$$

ఉదాహరణ 3 :

రామచంద్రులు రామ బాహులు రామరాములు రంగుగా
రామవార్థులు రామ సాయక రామతర్కములున్ దగన్
రామ భూధర రామసామజ రామ పద్మజరాసులున్
ధామవైఖరి ముప్పదేడిట దండి బాలిడి చెప్పుమా.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు – వాటి విలువలు :-

రామ = మూడు

చంద్రులు = ఒకట్లు

సంఖ్య 1 = 111

రామ = మూడు

బాహులు = రెండ్లు

సంఖ్య2 = 222

రామ = మూడు

రాములు = మూళ్ళు

సంఖ్య 3 = 333

రామ = మూడు

వార్ధులు = నాలుగులు

సంఖ్య 4 = 444

రామ = మూడు

సాయకములు = ఐదులు

సంఖ్య 5 = 555

రామ = మూడు

తర్కములు = ఆర్లు

సంఖ్య 6 = 666

రామ = మూడు

భూధరములు = ఏడులు

సంఖ్య 7 = 777

రామ = మూడు

సామజములు = ఎనిమిదులు

సంఖ్య 8 = 888

రామ = మూడు

పద్మజములు = తొమ్మిదులు

సంఖ్య 9 = 999

తాత్పర్యం ॥ పై సంఖ్యలను 37తో భాగిస్తే భాగఫలములు ఎంత వస్తాయి?

సమాధానము :

$$\frac{111}{37} = 3$$

$$\frac{222}{37} = \frac{2x111}{37} = 6 \qquad \frac{333}{37} = \frac{3x111}{37} = 9$$

$$\frac{444}{37} = \frac{4x111}{37} = 12 \qquad \frac{555}{37} = \frac{5x111}{37} = 15$$

$$\frac{666}{37} = \frac{6x111}{37} = 18 \qquad \frac{777}{37} = \frac{7x111}{37} = 21$$

$$\frac{888}{37} = \frac{8x111}{37} = 24 \qquad \frac{999}{37} = \frac{9x111}{37} = 27$$

ఉదాహరణ 4 :

శశికరాగ్ని వేదశరశాస్త్ర మునివసు
రంధ్ర నాగశైల రసశరాబ్ధి
రామ బాహు చంద్ర హేమంబు శశికరి
చాలుగొన్న సంఖ్య భాగమెంత?

సంఖ్య 1కు సంబంధించిన సంఖ్యలను సూచించే పదాలు – వాటి విలువలు :

శశి = 1

కర = 2

అగ్ని = 3

వేద = 4

శర = 5

శాస్త్ర = 6

ముని = 7

వసు = 8

రంధ్ర = 9

నాగ = 8

శైల = 7

రస = 6

శర = 5

అబ్ధి = 4

రామ = 3

బాహు= 2

చంద్ర = 1

సంఖ్య1= 12345678987654321

సంఖ్య 2కు సంబంధించిన సంఖ్యలను సూచించే పదాలు - వాటి విలువలు :

శశి = 1

కరి = 8

సంఖ్య2 = 81

తాత్పర్యం ॥ మొదటి సంఖ్య (సంఖ్య 1)ను రెండవ సంఖ్య (సంఖ్య2)తో భాగించిన భాగఫలమెంత?

సమాధానం : $\frac{12345678987654321}{81} = 152415789971041$

68. భాగహారములు - 8 (లీలావతి-భాగహార సూత్రం)

విషయం : లీలావతీ గణితంలోని భాగహార సూత్రం - ఉదాహరణ

సూత్రం : భాజ్యా ద్ధర శ్శుధ్యతి యద్గుణ స్స్యాత్

అంత్యాత్ఫలం తత్ఖలు భాగహారే

పదవిభాగం : భాజ్యాత్, హరః, శుధ్యతి, యత్, గుణః, స్యాత్ ।

అంత్యాత్, ఫలం, తత్, ఖలు, భాగహారే ॥

ఏ సంఖ్యచే గుణించబడిన విభాజకము విభాజ్యమునుండి నిశ్శేషముగా తీసివేయబడునో, ఆ సంఖ్య, భాగఫలము (Quotient) అగును.

విభాజ్యము - విభాజకము * సంఖ్య = 0 అయినచో, ఆ సంఖ్యను భాగఫలం (Quotient) అని అంటారు.

వివరణ :

భాగించబడే సంఖ్యను విభాజ్యము (Numerator) అంటారు.

భాగించే సంఖ్యను విభాజకము (Denominator) అంటారు.

భాగించుట వలన లభించిన ఫలమును భాగఫలము (Quotient) అంటారు.

విభాజ్యమును విభాజకముతో భాగించగా మిగిలిన సంఖ్యను శేషము (Remainder) అంటారు.

విభాజ్యము = భాగఫలము * విభాజకము + శేషము

భాగహారములో శేషము సున్న అయినపుడు,

విభాజ్యము = భాగఫలము * విభాజకము అగును.

అనగా, భాగఫలము, విభాజకములను గుణించగా వచ్చు సంఖ్య విభాజ్యముతో సమానమగును

ఉదాహరణ :

12 అనే సంఖ్యను 3తో భాగిద్దాం.

12ను విభాజ్యం అనియు, 3ను విభాజకమనియూ అంటారు.

ఇచ్చిన విభాజకమును (3ను) 4తో గుణించగా వచ్చు సంఖ్యను విభాజ్యమునుండి తీసివేయగా శేషము సున్నవస్తుంది. ఈ 4ను భాగఫలము అంటారు.

69. భాగహారములు - 9 (లీలావతి-సూక్ష్మీకరణ)

విషయం : లీలావతీ గణితంలోని భాగహారసూత్రం - ఉదాహరణ

సూత్రం : సమేన కేనాప్యపవర్త్య హార

భాజ్యౌ భజేద్వా సతి సంభవే తు॥

పదవిభాగం : సమేన, కేన, అపి, అపవర్త్య,హారభాజ్యౌ,

భజేత్, వా, సతి, సంభవే, తు

అర్థం :సాధ్యమైనచో, విభాజ్యమును విభాజకమును ఏదైన ఒక అంకెతో అపవర్తించి (కుదించి, భాగించుటచే చిన్న రాసులుగా మార్చి) భాగించవలెను.

వివరణ : విభాజ్యములోను, విభాజకములోను కూడా పోవు సంఖ్యలచే విభాజ్యమును, విభాజకమును భాగించి, ఆ రెండిటిని కుదించుటకు ప్రయత్నంచేయవచ్చును.

ఉదాహరణ : 12అను సంఖ్యను 8అనే సంఖ్యచే భాగించవలెనని అనుకొందాము. అప్పుడు విభాజ్యము 12 అనియు, విభాజకము 8 అనియు అనుకొందాము. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను 4 పోవును

(అంటే $12=4\times3$, $8=4\times2$)

$$\frac{12}{8} = \frac{4x3}{4x2} = \frac{3}{2}$$

ఈ విధంగా $\frac{12}{8}$ అను భాగహారములో, సంఖ్యలను కుదించగా, $\frac{3}{2}$ అనునది ఏర్పడును.

70. ప్రాచీన భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్తలు

1. గణితశాస్త్రం అనాదిగా జ్యోతిశ్శాస్త్రంలో భాగంగా గుర్తించబడింది. జ్యోతిశ్శాస్త్రాన్ని పెంచి, పోషించి, ప్రచారం చేసిన వారందరూ గణిత శాస్త్రంలో అత్యద్భుత ప్రజ్ఞాపాటవాలు ఉన్నవారే. అటువంటి మహర్షులపేర్లు కొన్ని లభిస్తున్నాయి.
2. జ్యోతిశ్శాస్త్రంలోనే గాక, ఛందశ్శాస్త్రంలోను, కల్పశాస్త్రంలోనూ సంఖ్యాశాస్త్రం, జ్యామితి (Geometry), త్రికోణమితి (Trigonometry) మొదలైన విషయాలలో అనేక గణితసూత్రాలకు రూపకల్పన చేసిన మహర్షులు ఉన్నారు. వారిలో కొందరి పేర్లు లభిస్తున్నాయి.
3. పైన పేర్కొన్న వారేగాక, తరువాతి కాలాల్లో అత్యద్భుత గణిత సూత్రాలను దర్శించిన మహానుభావులు చాలామంది ఉన్నారు. దురదృష్టవశాత్తు, వారి కృషి నేడు వారి పేరు మీద గాకుండా, కొన్ని వందల సంవత్సరాల తర్వాత పుట్టిన పాశ్చాత్య శాస్త్రవేత్తల పేర్లమీద ప్రసిద్ధిలో ఉన్నాయి. ఆ జాబితాలో లభ్యమైన ప్రసిద్ధమైన కొందరి పేర్లను కూడా సేకరించి ఈ దిగువన ఇవ్వడం జరిగింది.

1. లగధ
2. సూర్య
3. పితామహ
4. వ్యాస
5. వసిష్ఠ
6. అత్రి
7. పరాశర
8. కశ్యప
9. నారద
10. గర్గ
11. మరీచి
12. మనువు
13. అంగీరస
14. రోమశ
15. పౌలశ
16. చ్యవన
17. యవన
18. భృగు

19. శౌనక
20. బౌధాయన
21. ఆపస్తంబ
22. కాత్యాయన
23. మాణవ
24. మైత్రాయణ
25. వరాహ
26. వాధూల
27. మేధాతిథి
28. మయుడు
29. బృహస్పతి
30. పింగళ
31. ఆర్యభట్ట
32. వరాహమిహిర
33. భాస్కరాచార్య -1
34. భాస్కరాచార్య -2
35. విష్ణుగుప్త (చాణక్య)
36. సిద్ధసేన
37. మణిత్థ
38. శ్రీజిధ్వజ
39. కళ్యాణవర్మ
40. సింహతిలకసూరి
41. కాలకచక్ర
42. మహావీరాచార్య
43. భట్టోత్పల
44. దేవస్వామి
45. జీవశర్మ
46. సత్యాచార్య
47. పృథుయశస్సు
48. గోవిందస్వామి
49. బ్రహ్మగుప్త
50. వటేశ్వర
51. శ్రీధర
52. మాధవచార్య
53. నీలకంఠ
54. పావులూరి మల్లన్న మొదలైనవారు

71. భారతీయ గణిత శాస్త్ర సిద్ధాంతాలు

1. సూర్యసిద్ధాంతము –

ఇది క్రీ.పూ. 1000 సం॥ కంటె కూడా ప్రాచీనమయినదని అంటారు. ఇందులో భూమి యొక్క వ్యాసాన్ని 99% ఖచ్చితంగా అంచనా వేయడం జరిగింది. వాస్తవసంఖ్య 7327 మైళ్ళు ఉండగా, అంచనా 7840 మైళ్ళుగా ఇవ్వబడింది.

అదేవిధంగా భూమికి చంద్రునికి సగటుదూరము 99.99% ఖచ్చితంగా అంచనా వేయడం జరిగింది. వాస్తవసంఖ్య 2,52,710 మైళ్లు ఉండగా 2,53,000 మైళ్ళుగా అంచనావేయడం జరిగింది.

2. బౌధాయన సిద్ధాంతము, పైథాగరస్ పేరుమీద

జ్యామితి (Geometry) లో పాశ్చాత్యులకు పరిచయమైన అనేక సూత్రాలను భారతీయులు అంతకుపూర్వం చాలా ప్రాచీనకాలంలోనే వినియోగించుకున్నారు. ఉదాహరణకు లంబకోణ త్రిభుజమునకు చెందిన భుజములపై వైశాల్యములకు చెందిన సూత్రం పైథాగరస్ పేరు మీద ప్రసిద్ధిలో ఉంది. కాని అదే సిద్ధాంతం పైథాగరస్ (క్రీ.పూ. 500సం॥) కంటె ముందుగా కనీసం మూడు వందల సం॥కు పూర్వమే రచించబడిన బౌధాయన (క్రీ.పూ. 800సం॥) శుల్బ సూత్రాలలో కనిపిస్తోంది.

3. గోవిందస్వామి సిద్ధాంతము, న్యూటన్ గాస్‌ల పేరుమీద

క్రీ.పూ. 300 సం॥ నాటి గోవిందస్వామి రచించిన Interpolation Technique (సందంశ విధానము) అతని తర్వాత 1800 సంవత్సరాల తర్వాత పుట్టిన న్యూటన్, గాస్ సైంటిస్టుల పేరు మీద ప్రచారంలో ఉంది.

4. ఆర్యభట్ట సిద్ధాంతము – కోపర్నికస్ పేరుమీద

భూమి సూర్యుని చుట్టూ తిరుగుతూ ఉందనే సూర్యకేంద్ర సిద్ధాంతాన్ని క్రీ.శ. 5వ శతాబ్ధంలో ఆర్యభట్ట ప్రవేశపెట్టగా, అదే సిద్ధాంతము అతని తర్వాత 1000 సంవత్సరాల తర్వాత పుట్టిన కోపర్నికస్ పేరుమీద ప్రసిద్ధిలో ఉంది.

5. వటేశ్వరాచార్య సిద్ధాంతము - న్యూటన్ గాస్ పేరుమీద

క్రీ.శ 7వ శతాబ్ధంలో పుట్టిన వటేశ్వరాచార్య ప్రతిపాదించిన Interpolation Formula (సందంశ విధానం) అతని తర్వాత 1000 సంవత్సరాల తర్వాత పుట్టి పెరిగిన న్యూటన్, గాస్ శాస్త్రవేత్తల పేర్లమీద ప్రసిద్ధిలో ఉంది.

6. మాధవాచార్య సిద్ధాంతము - టైలర్ పేరుమీద

త్రికోణమితి (Trigonometry) కి చెందిన సైన్, కొసైన్ శ్రేణుల విలువలను మాధవాచార్య క్రీ.శ. 12వ శతాబ్దంలో కనుగొని యుండగా, అతని తర్వాత 250 సంవత్సరాల తర్వాత పుట్టిన టైలర్ పేరుమీద ప్రసిద్ధిలో ఉన్నాయి.

7. నీలకంఠ ఆచార్యసిద్ధాంతము - న్యూటన్ పేరుమీద

క్రీ.శ. 15వ శతాబ్ధానికి చెందిన నీలకంఠ ఆచార్య ప్రతిపాదించిన Infinite Geometric progressions అతని తర్వాత 200 సం॥కు జన్మించిన న్యూటన్ పేరుమీద ప్రసిద్ధిలో ఉన్నాయి.

8. కొందరు ప్రముఖగణిత శాస్త్రజ్ఞుల వివరాలు

భాస్కరాచార్య - 1

క్రీ.శ. 5వ శతాబ్దికి చెందిన భాస్కరాచార్య −1 సూర్యుని చుట్టూ భూమి తిరుగుటకు పట్టుకాలము 365.258756484 రోజులుగా 9 దశాంశస్థానముల వరకు ఖచ్చితంగా చెప్పగలిగాడు.

బ్రహ్మగుప్త :

క్రీ.శ. 6వ శతాబ్దికి చెందిన బ్రహ్మగుప్తుడు సంఖ్యలను ధనాత్మక (+ve), ఋణాత్మక (−ve) సంఖ్యలుగా విభజించి, వాటి వినియోగాన్ని వివరించాడు. అదేగాక, బ్రహ్మ స్ఫుట సిద్ధాంతాన్ని ప్రతిపాదించాడు.

శ్రీధ రాచార్య

క్రీ.శ. 11వ శతాబ్ధానికి చెందిన శ్రీధరాచార్యుడు బీజగణితానికి చెందిన ద్వివర్ణ సమీకరణాలను సాధించే ప్రక్రియను ప్రతిపాదించాడు. ఇదేగాక, త్రికోణమితి,

కాల్క్యులస్ మొదలైన గణితశాస్త్ర విభాగాలకు కూడ అమూల్యమైన సేవలనందించాడు.

భాస్కరాచార్య - 2

క్రీ.శ. 12వ శతాబ్దికి చెందిన భాస్కరాచార్యుడు Theory of continued fractions కు చెందిన అంశంపై విస్తృతంగా కృషిచేశాడు. ఇదేగాక అనంతం (Infinity) అనే అంశంపై చక్కని రచనలను వ్రాశాడు.

ఇంకా ఎందరో మహానుభావులు ..... వారి అమూల్య పరిశోధనలను ఇంకా వెలుగులోకి తీసుకురావలసిన బాధ్యత మనపైనే ఉంది.

72. వర్గములు - 1 (లీలావతి-కృతి)

విషయము : వర్గమును సాధించుట

సూత్రము : సమద్విఘాతః కృతిః ఉచ్యతే

వివరణ : ఇచ్చిన సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించగా వచ్చు ఫలితమును ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గము అంటారు. దీనినే "కృతి" అని కూడా అంటారు.

$a*a=a^2$

ఇది సాధారణ పద్ధతి.

ఉదాహరణ : 12^2 ను కనుగొనుట.

12 ను 12 తో గుణించాలి.

సమాధానం :

12 యొక్క వర్గం = 144.

దానిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాస్తారు.

$12^2 = 144$

73. వర్గములు - 2 (లీలావతి-కుడివైపు నుండి)

విషయము : వర్గమును సాధించుట

సూత్రము : స్థాప్యోంత్యవర్గో ద్విగుణాంత్యనిఘ్నా:॥

స్వస్వోపరిష్టాచ్చ తథాఽ పరేంకా:

త్యక్త్వాంత్యముత్సార్య పునశ్చ రాశిమ్॥

వివరణ:-1

ఇచ్చిన సంఖ్యను రెండు విధములుగా చూడవచ్చును. మొదటి పద్ధతిలో కుడివైపునుండి ఎడమవైపుకు చూస్తున్నప్పుడు, సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానమును మొదటి అంకె (ఆద్యాంకము) అనియు, ఎడమవైపు చివరి అంకెను 'చివరి అంకె' (అంత్యాంకము) అనియు సామాన్యముగా పేర్కొంటారు.

రెండవ పద్ధతిలో, ఎడమవైపు నుంచి కుడివైపునకు చూస్తున్నప్పుడు, ఎడమవైపు చిట్ట చివరి అంకెను మొదటి అంకె (ఆద్యాంకము) అనియు, ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను చివరి అంకె (అంత్యాంకము) అనియు, అనవచ్చును. పై శ్లోకం ప్రకారం వర్గములను రెండు విధములుగాను కనుగొనవచ్చును.

శ్లోకమునకు అర్థం :-

1. అంత్యాంకము యొక్క వర్గమును ముందుగా వ్రాసుకోవాలి.
2. అంత్యాంకమును రెండుచే గుణించగా వచ్చిన సంఖ్యతో మిగిలిన అంకెలను గుణించాలి. ఈ విధంగా గుణించగా వచ్చిన సంఖ్యను ఇంతకు మునుపు వ్రాసిన సంఖ్యకు ముందు స్థానంలో వ్రాసుకోవాలి.
3. అంత్యాంకమును విడిచిపెట్టి, మిగిలిన రాశిలోని అంకెలకు పై ప్రక్రియను వర్తింప చేయాలి. సంఖ్యలోని అన్ని అంకెలు పూర్తి అగునంతవరకు మరల మరల చేయవలెను. ఈ విధముగా చేయగా ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గం వస్తుంది.

ఈ వర్గములను కనుగొనుటకు రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి.

వర్గపద్ధతిని కుడినుండి ఎడమవైపునకు, అట్లే ఎడమ నుండి కుడివైపుకు చేయవచ్చును.

ఈ రెండు పద్ధతులూ కూడా క్రింద వివరింపబడ్డాయి.

వర్గమును కనుగొనే పద్ధతి :- కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు

పద్ధతి వివరణ : abc అనునది ఇచ్చిన సంఖ్య అనుకొందాము.

అందులో c – ఒకట్ల స్థానము; b – పదుల స్థానము; a – వందల స్థానము

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములో ఉన్న అంకెకు (c) వర్గమును c*c (ఒకట్ల స్థానము లగాయితు ఎడమ వైపుకు) వేసుకోవాలి.

   దీనిని సమాధానములోని మొదటి పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.

2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను 2 తో గుణించి తీసుకోవాలి.

   దానిని 2*c అనుకొందాము.

3. దీనిని ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానానికి ఎడమవైపున ఉన్న అంకెలతో (అంటే, వందల స్థానములోను, పదుల స్థానములోను ఉన్న అంకెలతో) గుణించాలి. అనగా, (ab) అనే అంకెలను (2*c) తో గుణించి వేసుకోవాలి. దీనిని సమాధానంలోని రెండవ పంక్తిలో పదుల స్థానం లగాయతు ఎడమవైపుకు వేసుకోవాలి.

4. పై మూడు స్టెప్పులతోను వర్గం కనుగొనడంలో c యొక్క వినియోగం పూర్తయ్యింది.

   ఇప్పుడు b నుండి ప్రారంభించాలి.

5. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె (b) కి వర్గాన్ని కనుగొనాలి.

   $b*b=b^2$

   దీనిని సమాధానంలో 3వ పంక్తిగా (వందల స్థానం లగాయతు ఎడమవైపుకు) వ్రాసుకోవాలి.

6. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానంలోని అంకె(b)ను 2 తో గుణించి తీసుకోవాలి.

7. దీనిని ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానానికి ఎడమవైపున ఉన్న అంకెలతో (అంటే వందల స్థానంలో ఉన్న అంకెతో) గుణించాలి.

   అనగా (a) అనే అంకెను (2*b) తో గుణించి సమాధానంలోని 4వ పంక్తిలో వేల స్థానం లగాయతు ఎడమవైపుకు వేసుకోవాలి.

8. పై మూడు స్టెప్పులతోను వర్గం కనుగొనడంలో b యొక్క వినియోగం పూర్తయ్యింది.

   ఇప్పుడు a నుండి ప్రారంభించాలి.

9. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని వందల స్థానంలో ఉన్న అంకె (a) కు వర్గాన్ని కనుగొనాలి.

   $a*a=a^2$

   దీనిని సమాధానములో 5వ పంక్తిగా (ఇంకొక్క స్థానం ఎడమవైపుకు జరిపి) వేసుకోవాలి.

10. a కి ఎడమవైపున అంకెలు ఏమీలేవు. అందుచేత ఇంతవరకూ సమాధానములో వ్రాసుకొనిన 5 పంక్తులలోని సంఖ్యలను జాగ్రత్తగా కూడాలి.

11. వచ్చిన విలువ ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గం అవుతుంది.

ఉదాహరణ 1 : $234^2= ?$

కుడి వైపునుండి ఎడమ వైపునకు చేయు పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 234
2. దాని క్రింద ఒక్క గీతను గీయవలెను.
3. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒక్కట్ల స్థానంలోని 4యొక్క వర్గము 16ను మొదటి పంక్తిలో వ్రాయవలెను.
4. ఒక్కట్ల స్థానంలోని 4ను రెండుచే గుణించగా వచ్చు విలువ=8
5. ఈ 8 చే పదులస్థానము, వందల స్థానములలో ఉన్న మిగిలిన ఆ సంఖ్యలను అనగా 23ను గుణించి రెండవ పంక్తిలో వ్రాయవలెను.

6. ఇప్పటి స్థితి

	2	3	4
		1	6
1	8	4	

7. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న 4ను విడిచిపెట్టి, మిగిలిన 23ను రాశిగా భావించవలెను.

8. ఈ రాశి లోని చివరి అంకె = 3 దీని యొక్క వర్గము =9 వచ్చును. దానిని మూడవ పంక్తిలో వ్రాయవలెను.

9. ఈ రాశిలోని చివరి అంకె = 3 దీనిని రెండుతో గుణించి, ఆ సంఖ్యతో ఈ రాశిలోని పదులస్థానంలో ఉన్న 2ను గుణించగా వచ్చిన విలువను నాల్గవ పంక్తిలో వ్రాయవలెను.

10. ఇప్పటి స్థితి

		2	3	4
			1	6
	1	8	4	
		9		
1	2			

11. పై రాశిలో 23లోని 3ను విడిచిపెట్టి, మిగిలిన 2 యొక్క వర్గమును కనుగొనాలి. ఆ వచ్చిన విలువ 4ను ఐదవ పంక్తిలో వ్రాయవలెను.

12. ఇంత వరకు వచ్చిన ఫలితములన్నియు ఒక్కొక్క స్థానమును వెనుకకు క్రమముగా వ్రాయవలెను.

13. వీటినన్నింటిని కూడవలెను.

14. ఇప్పటి స్థితి

		2	3	4
			1	6
	1	8	4	
		9		
1	2			
4				
5	4	7	5	6

15. $234^2 = 54756$

ఉదాహరణ 2 :

8796^2 = ?

సమాధానం :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 8796

ఇందులో తీసుకోవలసిన సంఖ్యలు ఈ విధంగా ఉంటాయి.

879 : 6

87 : 9

8 : 7

8

2. మొదటి పంక్తికి తీసుకోవలసిన అంకె = 6

2. మొదటి పంక్తిలో వ్రాసుకోవలసిన విలువ = 6^2 = 36

3. రెండవ పంక్తిలోని విలువను సాధించుటకు తీసుకోవలసిన సంఖ్యలు = 879 : 6

4. రెండవ పంక్తిలో వచ్చు విలువ = 2×6×879 = 10548

5. మూడవ పంక్తికి తీసుకోవలసిన అంకె = 9

6. మూడవ పంక్తిలో వ్రాసుకోవలసిన విలువ = 9^2 = 81

7. నాల్గవ పంక్తిలోని విలువను సాధించుటకు తీసుకోవలసిన సంఖ్యలు

= 87 : 9

8. నాల్గవ పంక్తిలో వచ్చు విలువ = 2×9×87= 1566

9. ఐదవ పంక్తికి తీసుకోవలసిన సంఖ్య = 7

10. ఐదవ పంక్తిలో వ్రాసుకోవలసిన విలువ = 7^2 = 49

11. ఆరవ పంక్తిలోని విలువను సాధించుటకు తీసుకోవలసిన సంఖ్యలు

= 8 : 7

12. ఆరవ పంక్తిలో వచ్చువిలువ = 2×7×8= 112

13. ఏడవ పంక్తిలో తీసుకోవలసిన సంఖ్య = 8

14. ఏడవ పంక్తిలో వ్రాసుకోవలసిన విలువ = 8^2 = 64

15. ఇచ్చిన సంఖ్యలో 8796 లోని మొత్తం అన్ని అంకెలకు సంబంధించిన ప్రక్రియలు పూర్తి అయినవి. గనుక, ఇంతవరకు ఏడు పంక్తులలో వ్రాసుకొనిన విలువలను, వాటివాటి స్థానములను గుర్తించుకొని, కూడవలెను.

16. ఇప్పటిస్థితి :-

1వ పంక్తి							3	6
2వ పంక్తి			1	0	5	4	8	
3వ పంక్తి					8	1		
4వ పంక్తి		1	5	6	6			
5వ పంక్తి			4	9				
6వ పంక్తి	1	1	2					
7వ పంక్తి	6	4						
	7	7	3	6	9	6	1	6

17. సమాధానం : 8796^2 = 77369616

ఉదాహరణ 3 :

45023^2 = ?

సమాధానం :

1. మొదటి పంక్తి = $3^2 = 9$
2. రెండవ పంక్తి = $2 \times 3 \times 4502 = 27012$
3. మూడవ పంక్తి = $2^2 = 4$
4. నాల్గవ పంక్తి = $2 \times 2 \times 450 = 1800$
5. ఐదవ పంక్తి = $0^2 = 0$
6. ఆరవ పంక్తి = $2 \times 0 \times 45 = 0$
7. ఏడవ పంక్తి = $5^2 = 25$
8. ఎనిమిదవ పంక్తి = $2 \times 5 \times 4 = 40$
9. తొమ్మిదవ పంక్తి = $4^2 = 16$

పై విలువలను వాటి వాటి స్థానములలో వ్రాయగా

ఇప్పటి స్థితి :

									9
				2	7	0	1	2	
							4		
			1	8	0	0			
					0				
				0					
		2	5						
	4	0							
1	6								
2	0	2	7	0	7	0	5	2	9

74. వర్గములు - 3 (లీలావతి-ఎడమవైపు నుండి)

విషయము : వర్గమును సాధించుట

వర్గమును కనుగొనే పద్ధతి :- ఎడమవైపు నుండి కుడివైపుకు

1. abc అనునది ఇచ్చిన సంఖ్య అనుకొందాము.
2. అందులో c – ఒకట్ల స్థానము; b – పదుల స్థానము; a – వందల స్థానము
3. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని వందల స్థానములో ఉన్న అంకెకు (a) వర్గమును a*a ను మొదటి పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.

   మొదటి పంక్తి = $a*a=a^2$
4. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని వందలస్థానంలో ఉన్న అంకె aను 2తో గుణించి తీసుకోవాలి.

   = 2*a
5. దీనిని, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని పదుల స్థానం (b) తో గుణించి, రెండవ పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.

   రెండవ పంక్తి = 2*a*(b)
6. దీనితో వందల స్థానంలో ఉన్న a యొక్క వినియోగం పూర్తయినట్లే.
7. ఇపుడు పదుల స్థానంలో ఉన్న అంకె (b) ను తీసుకొని, దీని వర్గాన్ని మూడవ పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి. = b^2
8. తర్వాత వందల, పదుల స్థానంలో అంకెను 2తో గుణించి, ఆ వచ్చిన విలువతో ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె (c) ను గుణించాలి.

   2* (ab)*c

   దీనిని 4వ పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.
9. తర్వాత ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను తీసుకొని, దాని వర్గాన్ని 5వ పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి. = c^2
10. వచ్చిన సమాధానాలను సక్రమంగా, వాటి వాటి స్థానాల్లో, వేసుకొని కూడాలి. అప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గము వస్తుంది.

ఉదాహరణ : పై పద్ధతిలో 234 అను సంఖ్యకు వర్గమును కనుగొనుము.

1వ పంక్తి	$= 2^2 =$	4
2వ పంక్తి	$= (2*2)*3 =$	1 2
3వ పంక్తి	$= 3^2 =$	9
4వ పంక్తి	$= (2*23)*4 =$	1 8 4
5వ పంక్తి	$= 4^2 =$	1 6
		5 4 7 5 6

మరొక వివరణ :

ఎడమ వైపు నుండి కుడి వైపు చేయు పద్ధతి (అంకెలు 2 కంటె ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు.)

1. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమును కనుగొను పద్ధతిని ab అక్షరముల ద్వారా వివరింపవచ్చును.

2. ఇందులో $(a+b)^2$ కి చెందిన సూత్రమును అనుసరిస్తాము. దానిని ఈ క్రింది విధంగా వ్రాసుకుంటాము.

   $(a\ \ b)^2 = a^2\ \ 2ab\ \ b^2$

1. ముందుగా a^2 విలువను కనుగొని వ్రాసుకుంటాము.

2. తరువాత 2a(b) విలువను కనుగొనవలసి ఉంది.

   కాని b ఒక అంకె కావచ్చును, లేక కొన్ని అంకెల సముదాయం కావచ్చును. ఏదైనను, 2aతో కుడి ప్రక్క ఉన్న అన్ని అంకెలను విడివిడిగా గుణించి విడివిడిగా వేసుకొనవలెను.

3. తరువాత b^2 కనుగొనవలెను. b కొన్ని అంకెల సముదాయం అయినచో, ఇందులోని ఎడమవైపు అంకెను కొత్త a గాను, మిగిలిన అంకెలను కొత్త b గాను తీసుకొనవలెను. ఇప్పుడు a^2,2ab ల విలువలను కనుగొనవలెను. ఈ విధంగా

పై పద్ధతిని మరల మరల అన్ని అంకెలు పూర్తి అగు వరకు చేయవలెను.

4. స్థానములను సరిచూచుకొనుచు అన్ని అన్ని అంకెలను జాగ్రత్తగా కూడగా, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గం వస్తుంది.

ఉదా : 234^2 = ?

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 234
2. ఇందులో a=2 : b= 34

ఈ విధంగా ఇచ్చిన సంఖ్యను విభజిస్తాము.

3. $(a \; b)^2 = a^2 \;\; 2ab \;\; b^2$

$$(2\;34)^2 = 2^2 \,|\, 2*2*(34) \,|\, 34^2$$
$$= 2^2 \,|\, 2*2*3 \,|\, 2*2*4 \,|\, 34^2$$

4. పై పద్ధతిలోనే $(34)^2$ని కూడ వ్రాసుకోవాలి.

$$3^2 \quad 2*3*4 \quad 4^2$$

5. ఇప్పటి స్థితి

1వ పంక్తి	4				
2వ పంక్తి	1	2			
3వ పంక్తి		1	6		
4వ పంక్తి			9		
5వ పంక్తి			2	4	
6వ పంక్తి				1	6
	5	4	7	5	6

75.వర్గములు-4 (లీలావతి-సంఖ్యను రెండు భాగములుగా చేసి)

విషయము : వర్గమును సాధించుట

సూత్రం : ఖండద్వయస్యాభిహతిః ద్వినిఘ్నీ ।

తత్ఖండ వర్గైక్యయుతాకృతిర్వా ॥

అర్థం : రెండు ఖండములను గుణించుటచే వచ్చు సంఖ్యను రెండుతో గుణించగావచ్చు విలువకు, ఆ రెండు ఖండముల యొక్క వర్గములను కలిపిన, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గము లభించును.

వివరణ :

1. వర్గమును కనుగొనుటకు ఇచ్చిన సంఖ్యను **A** అనుకుందాము.
2. దానిని రెండు ఖండములుగా (a,b భాగములు) చేయవలెను.

$$\mathbf{A} = a+b$$

3. ఆ రెండు ఖండములను గుణించగా వచ్చు విలువను రెట్టింపు చేయవలెను. (2*a*b)
4. పైన వచ్చిన సంఖ్యకు, ఆ ఖండముల యొక్క వర్గములను కలుపవలెను.

$$2*a*b+a^2+b^2 = \mathbf{A}^2$$

5. పైన వచ్చిన విలువ, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమగును.

ఉదాహరణ 1 :

$$96^2=?$$

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను **A** అనుకొందాము. దానిని రెండు ఖండములుగా చేద్దాము.
2. a= 90

   b = 6

   A = a+b = 90+6= 96
3. ఇచ్చిన సూత్రం ప్రకారము,

$$\mathbf{A}^2 = 2*a*b+a^2+b^2$$

$= 2*90*6+90^2 + 6^2$

$= 1080 + 8100 + 36$

$= 9216$

4. సమాధానం $= 96^2 = 9216$

ఉదాహరణ 2 :

$16^2=?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను **A** అనుకొందాము. దానిని రెండు ఖండములుగా చేద్దాము.

2. **A** = 16

a= 20

b = -4

A = a+b = 20 - 4= 16

3. ఇచ్చిన సూత్రం ప్రకారము,

$A^2 = 2*a*b+a^2+ b^2$

$= 2*20*(-4)+20^2 + (-4)^2$

$= -160 + 400 + 16$

$= 256$

4. సమాధానం $= 16^2 = 256$

ఉదాహరణ 3 :

$37^2=?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను **A** అనుకొందాము. దానిని రెండు ఖండములుగా చేద్దాము.

2. **A** = 37

a= 30

b = 7

A = a+b = 30 + 7= 37

3. ఇచ్చిన సూత్రం ప్రకారము,

$A^2 = 2*a*b+a^2+ b^2$

$= 2*30*7+30^2 + 7^2$

$= 420 + 900 +49$

$= 1369$

4. సమాధానం $= 37^2 = 1369$

ఉదాహరణ : 4

రసగుణేషబాణ రస సంఖ్యయును మఱి
బాణవేదవహ్ని పక్ష శశియు
వేఱువేఱు గాగ వెలయుగ వర్గించి
లబ్ధ మెఱుగ జెప్పు లలితముగను.

సంఖ్యలను సూచించే పదాలు – వాటి విలువలు :

రస = 6

గుణ = 3

ఇష = బాణము = 5

బాణ = 5

రస = 6

సంఖ్య 1= 65536

బాణ = 5

వేద = 4

వహ్ని = 3

పక్ష = 2

శశి = 1

సంఖ్య 2= 12345

ప్రశ్నలు:- $65536^2 = ?$

$12345^2 = ?$

ఇంతకు ముందు వివరించిన ఉదాహరణల పద్ధతిలో చేయగా ఈ సంఖ్యలకు వర్గములు ఈ క్రింది విధముగా వస్తాయి.

సమాధానములు :-

$65536^2 = 4294967296$

$12345^2 = 152399025$

76.వర్గములు - 5 (లీలావతి-కలుపుట, తీసివేత పద్ధతి)

విషయము : వర్గమును సాధించుట

సూత్రం :- ఇష్టోనయుక్ రాశివధః కృతిస్స్యాత్

ఇష్టస్య వర్గేణ సమన్వితో వా

అర్థం :- ఇచ్చిన సంఖ్యనుండి కొంత భాగమును తీసివేసియు, అదేభాగమును కలిపియు ఏర్పడిన సంఖ్యలను గుణించి, ఆభాగము యొక్క వర్గమును కలిపినచో, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గము వచ్చును.

వివరణ :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను **A** అనుకుందాము.
2. దానికి a అనుభాగమును తీసివేసినచో ఏర్పడు సంఖ్య = A-a
3. ఇచ్చిన సంఖ్యకు a అను భాగమును కలిపినచో ఏర్పడు సంఖ్య = A+a
4. A-a అను సంఖ్యను A+a అను సంఖ్యతో గుణించి a^2 ను కలిపినచో $\mathbf{A^2}$ వచ్చును.

$$(A-a)*(A+a) + a^2 = A^2-a^2+a^2 = A^2$$

గమనిక :- ఈ ప్రక్రియలో వినియోగిస్తున్న A+a గాని, A-a గాని సౌకర్యముగా ఉండునట్లుగా aను తీసుకొనవలెను.

ఉదాహరణ 1 :

$84^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = A = 84
2. a = 4 అనుకొందాము.
3. $84^2 = (A-a)(A+a) + a^2$

$= (84-4)(84+4)+4^2$

$= 80\times88+16$

$= 7040+16 = 7056$

ఉదాహరణ 2 :

$37^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = A = 37

2. a = 7 అనుకొందాము.

3. $37^2 = (A-a)(A+a) + a^2$

$= (37-7)\times(37+7)+7^2$

$= 30\times44+49$

$= 1320+49$

$= 1369$

ఉదాహరణ 3 :

$16^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = A = 16

2. a = 6 అనుకొందాము.

3. $16^2 = (A-a)(A+a) + a^2$

4. $16^2 = (16-6)(16+6) + 6^2$

$= 10\times22+36$

$= 220+36$

$= 256$

ఉదాహరణ 4 :

$96^2 = ?$

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = A = 96

2. a = 4 అనుకొందాము.

3. $96^2 = (A+a)(A-a) + a^2$

4. $96^2 = (96+4)(96-4)+4^2$

$= 100 \times 92+16$

$= 9200+16$

$= 9216$

లీలావతీ గణితంలో వర్గముల ఉదాహరణల కొరకు ఇచ్చిన శ్లోకము

శ్లో ॥ సఖే నవానాం చ చతుర్దశానాం

బ్రూహి త్రిహీనస్య శత త్రయస్య ।

పంచోత్త రస్యాప్యయుతస్య వర్గం

జానాసి చేద్వర్గ విధానమార్గమ్॥

పైశోక్లంలో ఇచ్చిన సంఖ్యలు :-

నవ = 9

చతుర్దశ = 14

త్రిహీన శతత్రయం = 300−3=297

పంచోత్తర అయుతం = 5+10000=10005

తా॥ మిత్రుడా! వర్గమును చేయు పద్ధతి తెలిసినచో, 9 యొక్క, 14 యొక్క, 297 (3చేత తీసివేయబడిన 300=300−3), 10005 (5చేత అధికమయిన అయుతము (=10000) =5+10000) యొక్కయు వర్గములను తెలుపుము.

సమాధానములు:-

$9^2 = 81$

$14^2 = 196$

$297^2 = 88203$

$10005^2 = 100100025$

77. వర్గ మూలములు-1 (లీలావతి-కారణాంక పద్ధతి)

విషయం :- కారణాంక పద్ధతిలో వర్గమూలములను కనుగొనుట.

వివరణ : ఇచ్చిన సంఖ్యకు కారణాంకములను కన్గొని, వాని సహాయంతో వర్గమూలములను కన్గొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 1 :- 4096 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

ఇచ్చిన సంఖ్యను ఏ సంఖ్యలు నిశ్శేషముగా భాగించగలవో గుర్తించి, వాటితో భాగించవలెను.

4096 = 2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2x2

$= 2^{12}$

$(4096)^{1/2} = (2^{12})^{1/2} = 2^6$

2X2X2X2X2X2 =64

సమాధానం :- 4096 అను సంఖ్యకు వర్గమూలము = 64

ఉదాహరణ 2 :- 11664 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

ఇచ్చిన సంఖ్యను ఏ సంఖ్యలు నిశ్శేషముగా భాగించగలవో గుర్తించి,వాటితో భాగించవలెను.

11664= 2×2×2×2×3×3×3×3×3×3

$= 2^4 \times 3^6$

$(11664)^{1/2} = 2^2 \times 3^3$

= 4×27

= 108

సమాధానం :- 11664 అను సంఖ్యకు వర్గమూలము = 108

ఉదాహరణ 3 :- 44100 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

$44100 = 10\times10\times7\times7\times3\times3$

$= 10^2\times7^2\times3^2$

$(44100)^{1/2} = 10\times7\times3$

$= 210$

సమాధానం :- 44100 అను సంఖ్యకు వర్గమూలము = 210

78. వర్గ మూలములు - 2 (లీలావతి-సాధారణ పద్ధతి)

విషయము : వర్గమూలమును సాధించుట

సూత్రం : త్యక్త్వాం త్యాత్ విషమాత్ కృతిం

ద్విగుణయేన్మూలం సమే తద్ధృతే ।

త్యక్త్వా లబ్ధకృతిం తదాద్య విషమాత్

లబ్ధం ద్వినిఘ్నం న్యసేత్ ॥

పంక్త్యాం పంక్తి హృతే సమేన్యవిషమాత్

త్యక్త్వాప్త వర్గం ఫలం ।

పంక్త్యాం తద్ద్విగుణం న్యసేదితి ముహుః

పంక్తే ర్దలం స్యాత్పదం ॥

పరిభాష :

సంస్కృతంలోని గణితపదాలకు నేటి పరిభాష ఈ విధంగా ఉంది.

1. కుడివైపు నుండి అంటే, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి బేసి స్థానాలలో ఉన్న అంకెలపై చుక్కలను పెట్టుకోవాలి. సంస్కృతంలో 'సరి' స్థానాన్ని "సమము" అని అంటారు. బేసి స్థానాన్ని "విషమము" అంటారు.
2. ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను "ఆది" (మొదలు) అంటారు. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు చివరన ఉన్న అంకెను "అంత్యము" (చివర) అంటారు.
3. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఎడమవైపున చివర చుక్క ఉన్న అంకెను "అంత్య విషమము" అంటారు.
4. సంఖ్య యొక్క వర్గమును "కృతి" అంటారు.
5. వర్గమూలమును "మూలము" అని కూడ అంటారు.
6. భాగించగావచ్చిన భాగఫలమును లబ్ధము అంటారు.
7. గుణకారమును 'నిఘ్నము' 'హతము' ; తీసివేతను - 'త్యాగము', "త్వక్త్యా" అనే పదముల చేత సూచిస్తారు.
8. దళము అనగా (2చేత) భాగించుట.

అర్థం & వివరణ

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను కుడివైపు నుండి పరిశీలించుము.
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడివైపు చిట్టచివరి అంకెను, అనగా, ఒకట్ల స్థానమును వర్గస్థానముగా గుర్తించుము. (ఆ అంకె పై చుక్కను ఉంచుము). దానికి ఎడమ వైపున ఉన్న ఒక స్థానము "అవర్గస్థానము ". దానిపై ఏ గుర్తును పెట్టవద్దు.
3. పై అంకెకు (అవర్గ స్థానమునకు) ఎడమవైపు అంకె తిరిగి వర్గస్థానమగును. అక్కడ చుక్కను ఉంచుము. తిరిగి దాని ఎడమవైపు ఒక అవర్గ స్థానమును విడువవలెను. ఈ విధముగా వర్గస్థానములను, అవర్గ స్థానములను గుర్తించుట పూర్తిచేయాలి.
4. ఇప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్యను ఎడమవైపు నుండి పరిశీలించుము. ఎడమవైపు నండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలను గ్రహించాలి. దానిని x1 అనుకొనుము.
5. (i) x1లో పోయే పెద్ద వర్గమును (a^2) ను తీసివేయాలి.

   (ii) తీసివేయగా వచ్చిన ఫలితాన్ని x2 అనుకొనుము.

   (iii) తీసివేసిన వర్గము (a^2) యొక్క వర్గమూలము (a) ను ఒక సమాధాన పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.
6. పై తీసివేత వలన వచ్చిన ఫలితానికి (x2కు), ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు నుండి వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను, జేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దీనిని x3 అనుకొనుము.
7. (i) x3 ను 2a తో భాగించాలి.

   (ii) వచ్చిన భాగఫలమును b అనుకొనుము.

   (iii) ఈ b యొక్క విలువను నిర్ధారించవలసి ఉన్నది. b యొక్క గరిష్ఠ విలువ 9. అంతకంటే (అనగా 9 కంటే) పెద్ద విలువ వచ్చినచో, b యొక్క విలువగా 9ని తీసుకోవలెను.

8. (i) x3 నుండి 2ab ను తీసివేయాలి.

(ii)ఫలితమును x4 అనుకొనుము.

9. (i) దానికి (x4కు) , పైన వినియోగించిన అంకె తర్వాతి కుడివైపు అంకెను జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

(ii)దానిని x5 అనుకొనుము

10. (i) x5 నుండి b^2 ను తీసివేయాలి.

(ii)ఫలితమును x6 అనుకొనుము.

11. పైన చేసిన రెండు తీసివేతలలో (అనగా , 2ab, b^2లు) ఏ స్థాయిలోనైనను తీసివేత సాధ్యముకానిచో, b యొక్క విలువను తగ్గించి, తిరిగి 8వ స్టెప్పునుండి చేయాలి.

12. (i) పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినచో,ఆ ‘b’ యొక్క విలువ నిర్ధారణ అయినట్లు అనుకోవాలి.

(ii) సమాధాన పంక్తిలో వ్రాసి ఉంచిన ‘a’ కు కుడివైపున ఆ ‘b’ విలువను చేర్చి వ్రాయాలి.

13. ఆ సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న (ab) విలువ ఇంతవరకు వినియోగించిన అంకెలతో కూడిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము అగును.

14. ఇచ్చిన సంఖ్యలో, ఇంకను వినియోగించవలసిన అంకెలు ఉన్నచో, a యొక్క విలువను దిగువన సూచించిన విధంగా మార్చవలెను.

పై ప్రక్రియను తిరిగి ప్రారంభించవలసి ఉంది.

15. సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న విలువను a యొక్క క్రొత్త విలువగా తీసుకోవాలి.

16. (i) x6 లో ఉన్న విలువకు, ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

(ii) దానిని x3 అనుకొనుము.

17. తిరిగి 7వ స్టెప్పునుండి చేయాలి.

18. ఈ విధంగా అవసరమయినన్ని సార్లు మరలమరల చేయగా, ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలము వస్తుంది.

సూచన : ఇచ్చిన సంఖ్యలకు వర్గమూలములను కనుగొనుటకు 1 నుండి 9 వరకు గల సంఖ్యల యొక్క వర్గములు తెలిసి ఉండుట చాలా అవసరము. దాని కొరకు ఈ క్రింది పట్టికను వినియోగించు కొనవలెను.

పట్టిక 1 : 0 నుండి 9 వరకు సంఖ్యల వర్గములు, వర్గమూలములు

వర్గము సంఖ్య	వర్గమూలము సంఖ్య
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9

ఉదాహరణ 1 : 196 యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 196
2. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానం (కుడివైపు) నుండి ప్రారంభించి , వర్గ స్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము

$$\dot{1}\ 9\ \dot{6}$$

3. ఈ సంఖ్యల వినియోగం ఎడమవైపు నుండి జరుగును.

4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 1

x 1 = 1

5. వర్గములు – వర్గమూలముల (పట్టిక–1) సహాయముతో, గుర్తించిన x1లో పోయే పెద్ద వర్గము (a^2) = 1

దాని వర్గమూలము (a) = 1

సమాధానపంక్తిలో aను వ్రాసుకోవాలి.

6. x1 నుండి a^2 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 =1–1=0

x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (9ను) కుడివైపున చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

x3 = 09=9

7. x3(=9) ను 2a (=2*1=2) తో భాగించగా, భాగఫలము 4 వస్తుంది. దానిని bగా తీసుకోవాలి.

b = 4 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

8. x4 = x3–2ab = 9–2*1*4 = 9–8=1

x4 =1

9. x4కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (=6) చేర్చి వ్రాయాలి.

x5 = 16.

10. x6= x5–b^2 = 16–16=0

11. పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ (=4) నిర్ధారణ అయినది.

12. సమాధాన పంక్తి = ab=14

13. ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగుల లేదు. కావున, సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలముగా తీసుకోవాలి.

196 యొక్క వర్గమూలము =14.

14. పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^2 = 1$	$\dot{1}\ 9\ \dot{6}$	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
2a=2*1=2	0 9	b = 4 (విలువ నిర్ధారణ
2ab = 2*1*4=8	8	కావలసి ఉంది)
	1 6	
$b^2 = 4*4$	1 6	తీసివేత విజయవంతమగుటచే
	0	b = 4 నిర్ధారించబడింది.
		సమాధాన పంక్తి = ab = 14

196యొక్క వర్గమూలము = 14

ఉదాహరణ 2 : 225 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 225
2. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానం (కుడివైపు) నుండి ప్రారంభించి , వర్గ స్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము

$$\dot{2}\ \ 2\ \ \dot{5}$$

3. ఈ సంఖ్యల వినియోగం ఎడమవైపు నుండి జరుగును.
4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 2 x 1 = 2
5. వర్గములు – వర్గమూలముల (పట్టిక–1) సహాయముతో, గుర్తించిన x1లో పోయే పెద్ద వర్గము (a^2) = 1
   దాని వర్గమూలము (a) = 1

సమాధానపంక్తిలో aను వ్రాసుకోవాలి.

6. x1 నుండి a^2 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 =2–1=1

x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (2ను) కుడివైపున చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

x3 = 12

7. x3(=12) ను 2a (=2*1=2) తో భాగించగా, భాగఫలము 6 వస్తుంది. దానిని bగా తీసుకోవాలి.

b = 6 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

8. x4 = x3–2ab = 12–2*1*6 = 12–12=0

x4 =0

9. x4కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (=6) చేర్చి వ్రాయాలి.

x5 = 05 = 5.

10. x6= $x5-b^2$ = 5–36

11. పైన చేసిన తీసివేత విజయవంతము కాలేదు. కనుక b యొక్క విలువను 1 తగ్గించి మరల చేయవలెను.

b = 6–1=5

x3= 12

12. x4 = x3–2ab = 12–2*1*5 = 12–10=2

x4 =2

13. x4కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (=5) చేర్చి వ్రాయాలి.

x5 = 25

14. x6= $x5-b^2$ = 25–25 = 0

15. పైన చేసిన తీసివేత విజయవంతమయినది గనుక b యొక్క విలువ (=5) నిర్ధారణ అయినది.

16. సమాధాన పంక్తి = ab=15

17. ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగుల లేదు. కావున, సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలముగా తీసుకోవాలి.

225 యొక్క వర్గమూలము =15.

18. పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^2 = 1$	$\dot{2}\ 2\ \dot{5}$	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
2a=2*1=2	1 2	b = 6 (విలువ నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
2ab = 2*1*6=12	1 2	
	0 5	తీసివేత విజయవంతము కాలేదు.
b^2 = 6*6=36	3 6	
	1 2	b = 5
2ab = 2*1*5=10	1 0	
	2 5	తీసివేత విజయవంతమగుటచే
b^2 = 5*5=25	2 5	b = 5 నిర్ధారించబడింది.
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 15

225 యొక్క వర్గమూలము = 15

ఉదాహరణ 3 : 6724 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 6724
2. ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఒకట్ల స్థానం (కుడివైపు) నుండి ప్రారంభించి , వర్గ స్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము

$$6\ \dot{7}\ 2\ \dot{4}$$

3. ఈ సంఖ్యల వినియోగం ఎడమవైపు నుండి జరుగును.
4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 67

   x 1 = 67

5. వర్గములు – వర్గమూలముల (పట్టిక–1) సహాయముతో, గుర్తించిన x1లో పోయే పెద్ద వర్గము (a^2) = 64

   దాని వర్గమూలము (a) = 8

   సమాధానపంక్తిలో aను వ్రాసుకోవాలి.

6. x1 నుండి a^2 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 =67–64=3

   x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (2ను) కుడివైపున చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

   x3 = 32

7. x3(=32) ను 2a (=2*8=16) తో భాగించగా, భాగఫలము 2 వస్తుంది. దానిని bగా తీసుకోవాలి.

   b = 2 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

8. x4 = x3–2ab = 32–2*8*2 = 32–32=0

   x4 =0

9. x4కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకెను (=4) చేర్చి వ్రాయాలి.

   x5 = 04

10. $x6 = x5 - b^2 = 4-4=0$

11. పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ (=2) నిర్ధారణ అయినది.

12. సమాధాన పంక్తి = ab=82

13. ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగుల లేదు. కావున, సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలముగా తీసుకోవాలి.

    6724 యొక్క వర్గమూలము =82.

14. పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^2 = 64$	$6\dot{7}2\dot{4}$	a = 8
	6 4	సమాధాన పంక్తి = 8
2a=2*8=16	3 2	b = 2 (విలువ నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
2ab = 2*8*2=32	3 2	
	0 4	
b^2 = 2*2=4	4	తీసివేత విజయవంతమగుటచే b = 2 నిర్ధారించబడింది.
	0	
		సమాధాన పంక్తి = ab = 82

6724 యొక్క వర్గమూలము = 82

ఉదాహరణ 4 : 34969 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొను పద్ధతిని చూపుము.

$a^2 = 1$	$\dot{3}\ 4\ \dot{9}\ 6\ \dot{9}$	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
2a=2*1=2	2 4	b = 12 : కాని b=9 గరిష్ఠ విలువ
2ab = 2*1*9=18	1 8	(నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
	6 9	
b^2 = 9*9=81	8 1	తీసివేత సాధ్యం కాలేదు.
	2 4	b =9-1= 8 (నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
2ab = 2*1*8=16	1 6	
	8 9	
b^2 = 8*8=64	6 4	b = 8 నిర్ధారించబడింది.
	2 5	
		సమాధాన పంక్తి = ab = 18
2a=2*18=36	2 5 6	a = 18
2ab = 2*18*7=252	2 5 2	b = 8-1= 7 (నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
	4 9	
b^2 = 7*7=49	4 9	b = 7 నిర్ధారించబడింది.
	0	

సమాధాన పంక్తి = ab = 187

34969 యొక్క వర్గమూలము = 187

ఉదాహరణ 5 : 148225 యొక్క వర్గమూలాన్ని కనుగొను పద్ధతిని చూపుము.

$a^2 = 9$	1 4 8 2 2 5	a = 3
	9	సమాధాన పంక్తి = 3
2a=2*3=6	5 8	b = 9
2ab = 2*3*9=54	5 4	(నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
	4 2	
b^2 = 9*9=81	8 1	తీసివేత సాధ్యం కాలేదు.
	5 8	b = 9-1=8 (నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
2ab = 2*3*8=48	4 8	
	1 0 2	
b^2 = 8*8=64	6 4	b = 8 నిర్ధారించబడింది.
	3 8	
		సమాధాన పంక్తి = ab = 38
2a=2*38=76	3 8 2	a = 38
2ab = 2*38*5=380	3 8 0	b = 5 (నిర్ధారణ కావలసి ఉంది)
	2 5	
b^2 = 5*5=25	2 5	b = 5 నిర్ధారించబడింది.
	0	

సమాధాన పంక్తి = ab = 385

148225 యొక్క వర్గమూలము = 385

79. వర్గ మూలములు-3 (పట్టిక పద్ధతి-పదివేలలోపు సంఖ్యలకు)

విషయం :- 10,000 లోపు సంఖ్యలకు (అనగా నాలుగు అంకెల వరకు గల సంఖ్యలకు) పట్టిక పద్ధతిలో వర్గమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు :

1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి నాలుగు అంకెలకు మించని వర్గమునకు వర్గమూలమును కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఇందులో రాబోయే వర్గమూలము రెండు అంకెలకు మించి ఉండదు.
3. ఈ పద్ధతి భిన్నములులేని, పూర్ణాంకములు గల వర్గమూలములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

పద్ధతి 1 :-

ఈ పద్ధతిలో రెండు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది.

(ఎ). 1 నుండి 10వరకు గల సంఖ్యల యొక్క వర్గములను కనుగొనండి.

(బి) అనగా, ఇప్పుడు లభించిన వర్గములకు 1 నుండి 10వరకు గల సంఖ్యలు, అదే క్రమంలో వర్గమూలములవుతాయి.

(సి) ఈ వర్గములను మొదటి నిలువు వరుసలోను, వాటికి సంబంధించిన వర్గమూలములను రెండవ నిలువు వరుసలోను ఉండునట్లు ఒక పట్టికను తయారుచేయండి. (పట్టిక-1).

పట్టిక1:1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యల వర్గములు, వర్గమూలములు

వర్గము సంఖ్య (a^2)	వర్గమూలము సంఖ్య (a)
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

25	5
36	6
49	7
64	8
81	9

2. పట్టిక –2 ను తయారు చేయుట :

(ఎ) వర్గము విలువలలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెకును 1 నుండి 9 వరకు ఉన్న అంకెలకును ఉన్న సంబంధమును చూపించు ఒక పట్టిక తయారు చేయాలి. (పట్టిక–2)

పట్టిక –2:– పట్టిక సహాయముతో తయారయిన వర్గము, వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు

వర్గము విలువలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె	**వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు**	
1	1	9
4	2	8
5	5	5
6	4	6
9	3	7
0	0	

3. (ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య(అనగా,వర్గము)లోని అంకెలను కుడివైపునుండి ఎడమవైపునకు, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయాలి.

(బి) ఇచ్చిన సంఖ్యలో నాలుగు అంకెలలోపు ఉన్నపుడు, రెండు గ్రూపులు మాత్రమే ఏర్పడతాయి.

(సి) అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపును x గ్రూపు అనియు, కుడివైపున ఉన్న గ్రూపును y గ్రూపు అనియు అనుకొందాము.

(డి) ఇచ్చిన సంఖ్య (=వర్గము) =xy అని వ్రాసుకోవచ్చు.

4.(ఎ) ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) × గ్రూపులోని సంఖ్యను పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

(సి) × గ్రూపులోని సంఖ్యకు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(డి) ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను గ్రహించాలి.

(ఇ) ఈ చిన్న సంఖ్యను వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి.

దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

5. × గ్రూపు సంఖ్యకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=a) ను (a+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని z అనుకొందాము.

$z = a(a+1)$

6.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (=y) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను గ్రహించాలి.

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను b1, b2, లను గుర్తించాలి.

7.ఎ. పైన సాధించిన z విలువను ×తో పోల్చి చూడవలెను.

బి. z విలువ × కంటే ఎక్కువ ఉన్నచో b1ను గ్రహించాలి.

దానిని b అనుకొందాము. b=b1

సి. అట్లుగాక z విలువ × కంటే తక్కువ ఉన్నచో b2 ను గ్రహించాలి.

దానిని b అనుకొందాము.

b = b2

8. a,b, ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలము వస్తుంది. వర్గమూలము = ab

ఉదాహరణ 1 :- 6241 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

1.ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్య = 6241

బి. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 62

కుడివైపు గ్రూపు = y = 41

2.ఎ. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను (=62)ను విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య(=62)ను పట్టిక -1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 62 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 62 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 49

62 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 64

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=49)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=49) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక -1 నుండి తీసుకోవాలి (=7). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a = 7

3. x గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=7) ను 8(=7+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని z అనుకొందాము.

$z = 7 \times 8 = 56$

4.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (y=41) ను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె = 1

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములో ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1,b2) గుర్తించాలి.

b1 = 1

b2 = 9

5.ఎ. పైన సాధించిన z విలువ (=56) ను x(=62) తో పోల్చాలి.

బి. z విలువ x కంటే తక్కువ ఉన్నది.

అందుచే b2ను గ్రహించి, దానిని bగా అనుకోవాలి.

b=b2= 9

6. సమాధానం :– వర్గమూలము కొరకు a b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్య 6241 కు వర్గమూలము = a b

= 7 9

ఉదాహరణ 2 :–

8649 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :–

1. ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్య = 8649

బి. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 86

కుడివైపు గ్రూపు = y = 49

2.ఎ. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను (=86ను) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య(=86ను) పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 86 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 86 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 81

86 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 100

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=81)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=81) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి (=9). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a = 9

3. × గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=9) ను 10(=9+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని z అనుకొందాము.

z = 9×10 = 90

4. ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (y=49) ను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె = 9

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములో ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1,b2) గుర్తించాలి.

b1 = 3

b2 = 7

5.ఎ. పైన సాధించిన z విలువ (=90) ను ×(=86) తో పోల్చాలి.

బి. z విలువ × కంటే ఎక్కువ ఉన్నది.

అందుచే b2ను గ్రహించి, దానిని bగా అనుకోవాలి.

b=b1= 3

6. సమాధానం :– వర్గమూలము కొరకు a b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్య 8649 కు వర్గమూలము = a b

= 9 3

80. వర్గ మూలములు –4(పట్టిక పద్ధతి-పదివేల నుండి నలభైవేలమధ్య సంఖ్యలకు)

విషయం :- 10,000 నుండి 40,000 వరకు మధ్యలోగల సంఖ్యలకు పట్టిక పద్ధతిలో వర్గమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు :

1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి 10,000 నుండి 40,000 వరకు మధ్యలో గల సంఖ్యలకు వర్గమూలములను కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఇందులో రాబోయే వర్గమూలము విలువ 200కు మించి ఉండదు.
3. ఈ పద్ధతి భిన్నములు లేని, పూర్ణాంకములు గల వర్గమూలములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

పద్ధతి 1:-

1. ఈ పద్ధతిలో రెండు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది.

(ఎ). 11 నుండి 20వరకు గల సంఖ్యల యొక్క వర్గములను కనుగొనండి.

(బి) అనగా, ఇప్పుడు లభించిన వర్గములకు 11 నుండి 20వరకు గల సంఖ్యలు, అదే క్రమంలో , వర్గమూలములవుతాయి.

(సి) ఈ వర్గములను మొదటి నిలువు వరుసలోను, వాటికి సంబంధించిన వర్గమూలములను రెండవ నిలువు వరుసలోను ఉండునట్లు ఒక పట్టికను తయారుచేయండి. (పట్టిక–1).

పట్టిక1:11 నుండి 20 వరకు సంఖ్యల వర్గములు, వర్గమూలములు

వర్గము సంఖ్య (a^2)	వర్గమూలము సంఖ్య (a)
121	11
144	12
169	13
196	14

225	15
256	16
289	17
324	18
361	19
400	20

2. పట్టిక -2 ను తయారు చేయుట :

(ఎ) వర్గము విలువలలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెకును 1 నుండి 9 వరకు ఉన్న అంకెలకును ఉన్న సంబంధమును చూపించు ఒక పట్టిక తయారు చేయాలి.(పట్టిక-2)

పట్టిక -2 :- పట్టిక సహాయముతో తయారయిన వర్గము, వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు

వర్గము విలువలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె	**వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు**	
1	1	9
4	2	8
5	5	5
6	4	6
9	3	7
0	0	

3. (ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య(అనగా,వర్గము)లోని అంకెలను కుడివైపునుండి ఎడమవైపునకు, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయాలి.

(బి) ఇచ్చిన సంఖ్యలో నాలుగు అంకెలలోపు ఉన్నపుడు, రెండు గ్రూపులు మాత్రమే ఏర్పడతాయి.

(సి) అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపును x గ్రూపు అనియు, కుడివైపున ఉన్న గ్రూపును y గ్రూపు అనియు అనుకొందాము.

(డి) ఇచ్చిన సంఖ్య (= వర్గము) =xy అని వ్రాసుకోవచ్చు.

4.(ఎ) ముందుగా × గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) × గ్రూపులోని సంఖ్యను పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

(సి) × గ్రూపులోని సంఖ్యకు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(డి) ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను గ్రహించాలి.

(ఇ) ఈ చిన్న సంఖ్యను వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1నుండి తీసుకోవాలి.

దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

5. × గ్రూపు సంఖ్యకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=a) ను (a+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని Z అనుకొందాము.

Z=a(a +1)

6.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (=y) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను గ్రహించాలి.

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను b1, b2, లను గుర్తించాలి.

7.ఎ. పైన సాధించిన z విలువను ×తో పోల్చి చూడవలెను.

బి. z విలువ × కంటే ఎక్కువ ఉన్నచో b1ను గ్రహించాలి.

దానిని b అనుకొందాము. b=b1

సి. అట్లుగాక z విలువ × కంటే తక్కువ ఉన్నచో b2 ను గ్రహించాలి.

దానిని b అనుకొందాము.

b = b2

8. a,b ల విలువను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలము వస్తుంది.

వర్గమూలము = ab

ఉదాహరణ 1: 15129 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

1.ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్య = 15129

బి. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 151

కుడివైపు గ్రూపు = y = 29

2.ఎ. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను (=151ను) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య(=151ను) పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 151 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 151 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 144

151 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 169

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=144)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=144) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి (=12). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a = 12

3. x గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=12) ను 13(=12+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని Z అనుకొందాము.

Z = 12×13 = 156

4.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు(y=29) ను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె = 9

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములో ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1,b2) గుర్తించాలి.

b1 = 3

b2 = 7

5.ఎ. పైన సాధించిన z విలువ (=156) ను x(=151) తో పోల్చాలి.

బి. z విలువ x కంటే ఎక్కువ ఉన్నది.

అందుచే b2ను గ్రహించి, దానిని b గా అనుకోవాలి.

b=b1= 3

6. సమాధానం :– వర్గమూలము కొరకు a, b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్య 15129 కు వర్గమూలము = a b

= 12 3

ఉదాహరణ 2 : 30276 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :–

1.ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్య = 30276

బి. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 302

కుడివైపు గ్రూపు = y = 76

2.ఎ. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను (=302ను) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య(=302ను) పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 302 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 302 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 289

302 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 324

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=289)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=289) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక −1 నుండి తీసుకోవాలి (=17). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a = 17

3. × గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=17) ను 18(=17+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని z అనుకొందాము.

z = 17×18 = 306

4.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (y=76) ను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె = 6

సి. పట్టిక −2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములో ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1,b2) గుర్తించాలి.

b1 = 4

b2 = 6

5.ఎ. పైన సాధించిన z విలువ (=306) ను ×(=302) తో పోల్చాలి.

బి. z విలువ × కంటే ఎక్కువ ఉన్నది.

అందుచే b2ను గ్రహించి, దానిని bగా అనుకోవాలి.

b=b1= 4

6. సమాధానం :− వర్గమూలము కొరకు a b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్య 30276 కు వర్గమూలము = a b

= 1 7 4

ఉదాహరణ 3: 39601 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

1.ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్య = 39601

బి. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 396

కుడివైపు గ్రూపు = y = 01

2.ఎ. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను (=396ను) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య(=396ను) పట్టిక –1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 396 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 396 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 361

396 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 400

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=361)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=361) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి (=19). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a = 19

3. x గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=19) ను 20(=19+1) తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానినిz అనుకొందాము.

z = 19×20 = 380

4.ఎ. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (y=01) ను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె = 1

సి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న వర్గమూలములో

ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1,b2) గుర్తించాలి.

b1 = 1

b2 = 9

5.ఎ. పైన సాధించిన్న విలువ (=380) ను ×(=396) తో పోల్చాలి.

బి. z విలువ × కంటే ఎక్కువ ఉన్నది.

అందుచే b2ను గ్రహించి, దానిని bగా అనుకోవాలి.

b=b1= 9

6. సమాధానం :- వర్గమూలము కొరకు a b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్య 39601 కు వర్గమూలము = a b

= 19 9

81. వర్గ మూలములు - 5
(పట్టిక పద్ధతి-పదివేల నుండి పదిలక్షల లోపు సంఖ్యలకు)

విషయం :- 10,000 నుండి 9,99,999 వరకు మధ్యలో గల సంఖ్యలకు పట్టిక పద్ధతిలో వర్గమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు :

1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి 10,000 నుండి 9,99,999 వరకు మధ్యలో గల సంఖ్యలకు వర్గమూలమును కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఇందులో రాబోయే వర్గమూలము 1,000కు మించి ఉండదు.
3. ఈ పద్ధతి భిన్నములులేని, పూర్ణాంకములు గల వర్గమూలములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

పద్ధతి :

1. ఈ పద్ధతిలో వర్గమూలముల కొరకు తయారు చేసిన రెండు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది.

2.(ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య(అనగా,వర్గము)లోని అంకెలను కుడివైపునుండి ఎడమవైపునకు, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయాలి.

(బి) ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఆరు అంకెలలోపు ఉన్నపుడు, మూడు గ్రూపులు మాత్రమే ఏర్పడతాయి.

(సి) అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపును x గ్రూపు అనియు,
మధ్యలో ఉన్న గ్రూపును y గ్రూపు అనియు,
కుడివైపున ఉన్న గ్రూపును z గ్రూపు అనియు అనుకొందాము.

(డి) ఇచ్చిన సంఖ్య (=వర్గము) =xyz అని వ్రాసుకోవచ్చు.

3ఎ వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను (a) సాధించుట:
ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) × గ్రూపులోని సంఖ్యను పట్టిక −1లోని వర్గము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

(సి) × గ్రూపులోని సంఖ్యకు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(డి) ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను గ్రహించాలి.

(ఇ) ఈ చిన్న సంఖ్యను వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక −1నుండి తీసుకోవాలి.

దానిని ‘a’ గా వ్రాసుకోవాలి.

4. వర్గమూలములోని మధ్య అంకెను (b) సాధించుట :

×గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=a)ను అదే సంఖ్యతో అనగా a తో గుణించి ఉంచుకొనవలెను. దానిని K అనుకొందాము.

K = a*a

5. × గ్రూపులోని సంఖ్య నుండి K ను తీసివేయాలి.

= ×−K

6. y గ్రూపులోని ఎడమవైపు అంకెను ఈ భేదమునకు కుడివైపున, చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

7. దీనిని (2*a +1) తో భాగించి, భాగఫలము(Q) ను, శేషము (R) ను గుర్తించాలి.

8. ఈ భాగఫలముQ వర్గమూలములోని మధ్య అంకె అగును. దానిని ‘b’ అనుకొందాము.

b = Q

9. వర్గమూలములోని కుడివైపు అంకెను (c) సాధించుట

ఎ. ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపున గ్రూపు (= z) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

బి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను గ్రహించాలి.

సి. పట్టిక −2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న, వర్గమూలములోని ఒకట్ల స్థానములో ఉండదగిన అంకెలను b1, b2 లను గుర్తించాలి.

10. ఎ. పైన సాధించిన భాగఫలము (=Q) ను, శేషము (=R) ను పోల్చి చూడవలెను.

బి. Q విలువ R విలువ కంటె ఎక్కువ ఉన్నచో b1ను గ్రహించాలి. దీనిని ‘c’ అనుకొందాము.

c = b1

అట్లు గాక,

Q విలువ R విలువ కంటె తక్కువ ఉన్నచో b2ను గ్రహించాలి. దీనిని ‘c’ అనుకొందాము.

c = b2

11. a,b,c ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు వర్గమూలము వస్తుంది.

వర్గమూలము = abc

సూచన :- కొన్ని సందర్భలలో Q ను సవరించుకొనవలసి రావచ్చును. గమనించవలెను.

ఉదాహరణ 1 = 537289 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 537289

2. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా, ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 53

మధ్య గ్రూపు = y = 72

కుడివైపు గ్రూపు = z = 89

3. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను (a)సాధించుట

ఎ. ముందుగా ఎడమవైపు గ్రూపు (=x గ్రూపు) లోని సంఖ్యను (=53) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య (=53) ను పట్టిక –1 లోని వర్గము విలువతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 53 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 53 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 49

53 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 64

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్య (=49) ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=49) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి(=4). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

జీ. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకె = a=7

4. వర్గమూలములోని మధ్య అంకెను (b) సాధించుట :

ఎ. x గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=7)ను7తో గుణించి ఉంచుకోవాలి.

K=7×7=49

బి. × గ్రూపు సంఖ్య నుండి K ను తీసివేయాలి.

భేదం = 53–49=4

సి. y గ్రూపులోని ఎడమవైపు అంకె (=7)ను, పై భేదానికి (=4) కుడివైపున చేర్చి వ్రాయగా 47 వస్తుంది.

డి. ఈ సంఖ్యను 2*7+1=15 తో భాగించాలి.

$$\frac{47}{15} = 3 + 2/15 \; ; Q=3, R=2$$

ఇ. భాగఫలము (Q=3) వర్గమూలములోని మధ్య అంకె అవుతుంది.

b = 3

5. వర్గమూలములోని కుడివైపు అంకెను (c) ను సాధించుట :

ఎ. z గ్రూపులోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె = 9

బి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న, వర్గమూలమును ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1, b2) లను గుర్తించాలి.

b1= 3

b2 = 7

సి. Q విలువను R తో పోల్చి చూడాలి.

డి. Q విలువ R కంటె పెద్దది కనుక b1ను గ్రహించాలి.

దీనిని 'c' అను కోవాలి.

c = b1= 3

6. సమాధానం :– ఇచ్చిన సంఖ్య 537289 కు వర్గమూలం = a b c

= 733

ఉదాహరణ 2 : 717409 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 717409

2. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున

గ్రూపులుగా వ్రాయగా, ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 71

మధ్య గ్రూపు = y = 74

కుడివైపు గ్రూపు = z = 09

3. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను (a) సాధించుట

ఎ. ముందుగా ఎడమవైపు గ్రూపు (=x గ్రూపు) లోని సంఖ్యను (=71) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య (=71) ను పట్టిక –1 లోని వర్గము విలువతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 71 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 71 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 64

71 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 81

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్య (=64) న గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=64) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి(=8). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

జీ. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకె a=8

4. వర్గమూలములోని మధ్య అంకెను (b) సాధించుట :

ఎ. x గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=8)ను8తో గుణించి ఉంచుకోవాలి.

K=8×8=64

బి. x గ్రూపు సంఖ్య నుండి Y ను తీసివేయాలి.

భేదం = 71–64=7

సి. y గ్రూపులోని ఎడమవైపు అంకె (=7)ను, పై భేదానికి (=7) కుడివైపున చేర్చి వ్రాయగా 77 వస్తుంది.

$$\frac{77}{17} = 4 + 9/17 \; ; Q=4, R=9$$

డి.	ఈ సంఖ్యను 2*8+1=17 తో భాగించాలి.

ఇ.	భాగఫలము (Q=4) వర్గమూలములోని మధ్య అంకె అవుతుంది.

b = 4

5. వర్గమూలములోని కుడివైపు అంకెను (c) ను సాధించుట :

ఎ.	z గ్రూపులోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె = 9

బి.	పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న, వర్గమూలమును ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1, b2) లను గుర్తించాలి.

b1= 3

b2 = 7

సి.	Q విలువను R తో పోల్చి చూడాలి.

డి.	Q విలువ R కంటె చిన్నది కనుక b2ను గ్రహించాలి.

దీనిని 'c' అను కోవాలి.

c = b2= 7

6. సమాధానం :– ఇచ్చిన సంఖ్య 717409 కు వర్గమూలం = a b c

= 84 7

ఉదాహరణ 3 : 952576 అను సంఖ్యకు వర్గమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1.	ఇచ్చిన సంఖ్య = 952576

2.	ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, రెండేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా, ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 95

మధ్య గ్రూపు = y = 25

కుడివైపు గ్రూపు = z = 76

3. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను (a) సాధించుట

ఎ. ముందుగా ఎడమవైపు గ్రూపు (=× గ్రూపు) లోని సంఖ్యను (=95) విశ్లేషించాలి.

బి. × గ్రూపులలోని సంఖ్య (=95) ను పట్టిక –1 లోని వర్గము విలువతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 95 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 95 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 81

95 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 100

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్య (=81) న గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=81) వర్గముగా భావించి, దాని వర్గమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి(=9). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

జీ. వర్గమూలములోని ఎడమవైపు అంకె a=9

4. వర్గమూలములోని మధ్య అంకెను (b) సాధించుట :

ఎ. × గ్రూపుకు సంబంధించిన వర్గమూలము సంఖ్య (=9)ను9తో గుణించి ఉంచుకోవాలి.

$K=9\times9=81$

బి. × గ్రూపు సంఖ్య నుండి K ను తీసివేయాలి.

భేదం = 95–81=14

సి. y గ్రూపులోని ఎడమవైపు అంకె (=2)ను, పై భేదానికి (=14) కుడివైపున చేర్చి వ్రాయగా 142 వస్తుంది.

డి. ఈ సంఖ్యను 2-9+1=19 తో భాగించాలి.

$$\frac{142}{19} = 7 + 9/19 \,;\, Q=7, R=9$$

ఇ. భాగఫలము (Q=7) వర్గమూలములోని మధ్య అంకె అవుతుంది.

b = 7

5. వర్గమూలములోని కుడివైపు అంకెను (c) ను సాధించుట :

ఎ. Z గ్రూపులోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె = 6

బి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న, వర్గమూలమును ఒకట్ల స్థానంలో ఉండదగిన అంకెలను (b1, b2) లను గుర్తించాలి.

b1= 4

b2 = 6

సి. Q విలువను R తో పోల్చి చూడాలి.

డి. Q విలువ R = కంటె చిన్నది కనుక b2ను గ్రహించాలి.

దీనిని 'c' అనుకోవాలి.

c = b2= 6

6. సమాధానం :– ఇచ్చిన సంఖ్య 952576 కు వర్గమూలం

= a b c

= 976

భాగం–7

82. ఘనములు - 3
(లీలావతి-అంకెలను గుర్తించుటద్వారా)

విషయం :- సంఖ్యల యొక్క ఘనములను కనుగొనుట

సూత్రం : 1. సమత్రిఘాతశ్చ ఘన: ప్రదిష్ట :
స్థాప్యో ఘనోంత్యస్య తతోంత్యవర్గ:
ఆది త్రినిఘ్న స్తత ఆదివర్గ:
త్ర్యంత్యాహతో థాది ఘనశ్చ సర్వే ॥

2. స్థానాంతరత్వేన యుతా ఘన స్స్యాత్
ప్రకల్ప్య తత్ఖండ యుగం తతోంత్యమ్ ।
ఏవం ముహుర్వర్గ ఘన ప్రసిద్ధా
వాద్యాంకతో వా విధిరేష కార్య : ॥

పదవిభాగము :

1. సమత్రిఘాత: , చ, ఘన:, ప్రదిష్ట:,
స్థాప్య: , ఘన: , అంత్యస్య, తత:, అంత్యవర్గ:,
ఆది త్రినిఘ్న:, తత:, ఆదివర్గ:,
త్ర్యంత్యాహత:, అథ, ఆదిఘన:, చ, సర్వే ॥.

2. స్థానాంతరత్వేన, యుతా:, ఘన:, స్యాత్,
ప్రకల్ప్య, తత్, ఖండయుగం, తత:, అంత్యం,
ఏవం, ముహు: వర్గఘన ప్రసిద్ధౌ,
ఆద్యాంకత: వా, విధి:, ఏష:,కార్య:

తాత్పర్యము **:**

1. సమానమైన మూడు సంఖ్యలను గుణిస్తే, ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనము విలువ వస్తుంది.
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి, అంత్యాంకము (a) ను, ఆద్యాంకము (b) ను గుర్తించాలి.

3. అంత్యాంకము యొక్క ఘనము (a^3) ను కనుగొనవలెను.

4. అంత్యాంకము యొక్క వర్గమును (a^2), ఆద్యాంకము (b) తోను, 3తోను గుణించవలెను ($=3a^2b$)

5. ఆద్యాంకము యొక్క వర్గమును (b^2), ఆత్యాంకము (a) తోను, 3తోను గుణించవలెను ($=3ab^2$)

6. ఆద్యాంకము యొక్క ఘనమును (b^3) కనుగొనవలెను.

7. వీటిని ఒక్కొక్క స్థానం కుడివైపు జరిపి కూడాలి.

8. ఇంతవరకు వినియోగించిన అంత్యాంకమును, ఆద్యాంకమును కలసిగట్టుగా అంత్యాంకముగా గ్రహించాలి. తర్వాత అంకెను ఆద్యాంకముగా గ్రహించాలి. పై పద్ధతిని మరలమరలచేయాలి. అప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనము విలువ వస్తుంది.

9. పై ప్రక్రియను కుడివైపు నుండి , అనగా ఒకట్ల స్థానము నుండి ప్రారంభించి కూడా చేయవచ్చును.

వివరణ :

పద్ధతి 1: సమానమైన మూడు అంకెలను గుణించినచో, ఘనమువస్తుంది.

వివరణ :-

ఇచ్చిన సంఖ్యను 'a' అనుకొందాము.

$a*a*a=a^3$

ఇక్కడ a^3 ను a యొక్క ఘనం అంటారు.

పద్ధతి 2 :

1. ముందుగా ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎన్ని అంకెలు ఉన్నాయోచూసుకోవాలి.

2. ఇచ్చిన సంఖ్యలో రెండంకెలు ఉన్నచో

i) ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమవైపు చిట్టచివర ఉన్న అంకెను అంత్యాంకము (a) గాను, దానికి కుడివైపున ఉన్న అంకెను ఆద్యాంకము (b) గాను తీసుకోవాలి.

అనగా ఇచ్చిన సంఖ్యను ab గా భావించినట్లగును.

ii) అంత్యాంకము (a), ఆద్యాంకము (b) ల సహాయముతో ఈ క్రింది వాటిని కనుక్కోవాలి.

అంత్యాంకము^{3} = a^3

3 * అంత్యాంకము^{2} * అద్యాంకము = $3a^2b$

3 * అంత్యాంకము * అద్యాంకము^{2} = $3ab^2$

ఆద్యాంకము^{3} = b^3

iii) ఈ విధంగా వచ్చిన విలువలను వరుసగా ఒక్కొక్క స్థానం కుడివైపుకు జరిపి వేసుకొని, కూడాలి.

iv) ఇట్లు చేయగా, సంఖ్య (ab) యొక్క ఘనము విలువ వస్తుంది.

3. ఇచ్చిన సంఖ్యలో మూడు గాని, అంతకంటె ఎక్కువ అంకెలు ఉన్నచో

i) ముందుగా ఎడమవైపు నుండి రెండంకెలను గ్రహించాలి.

ii) ఎడమవైపు చిట్ట చివరి అంకెను అంత్యాంకము (a) గాను, దానికి కుడివైపున ఉన్న అంకెను ఆద్యాంకము (b) గాను తీసుకోవాలి.

iii) అంత్యాంకము (a) , ఆద్యాంకము (b) లను 2 (i) నుండి 2(iv) స్టెప్పులలో వివరించిన పద్ధతులలో వినియోగించి, పైన తీసుకొనిన అంకెల యొక్క ఘనమును కనుకోవాలి.

(అనగా, a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 ల విలువలను జాగ్రత్తగా వాటివాటి స్థానాలలో వేసుకొని కూడగా ఘనం వస్తుంది.)

iv) ఈ ఘనము విలువను విడిగా ఉంచుకోవాలి (**X**లో)

v) ఇంతవరకు వినియోగించిన అంత్యాంకము (a), ఆద్యాంకము (b) ల విలువలను ఈ క్రింది విధంగా మార్చాలి.

vi) ఇంతవరకు వినియోగించిన అంకెల సముహమును అంత్యాంకము (a) యొక్క క్రొత్త విలువగా తీసుకోవాలి.

vii) వాటికి కుడివైపున ఉన్న అంకెను (అనగా, వినియోగించవలసి ఉన్న అంకెలలో ఎడమవైపున ఉన్న అంకెను) ఆద్యాంకము (b) యొక్క క్రొత్త విలువగా తీసుకోవాలి.

viii) క్రొత్త విలువలుగల ఈ అంత్యాంకము (a), ఆద్యాంకము (b) లను వినియోగించి ఈ క్రింది వానిని కనుక్కోవాలి.

3 * అంత్యాంకము2^2 * ఆద్యాంకము = $3a^2b$

3 * అంత్యాంకము * ఆద్యాంకము^{2} = $3ab^2$

ఆద్యాంకము^{3} = b^3

ix) ఇంతకు ముందు 3(iv) లో విడిగా 'X' లో ఉంచుకొనిన ఘనము విలువను, మరియు పైన వచ్చిన మూడు విలువలను వరుసగా ఒక్కొక్క స్థానం కుడివైపునకు జరిపి వేసుకొని కూడాలి.

x) ఈ విధంగా చేయగా, ఇంత వరకు గ్రహించిన అంకెలతో కూడిన సంఖ్య యొక్క ఘనము విలువ వస్తుంది.

4. ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఇంకను కొన్ని అంకెలు మిగిలి ఉండి, వినియోగించ వలసి ఉన్నచో......

i) 3 (x) లో వచ్చిన ఘనము విలువను X లో వేసుకోవాలి.

ii) 3(v) నుండి 3(x) వరకు మరల చేయవలెను.

5. అన్ని అంకెలను వినియోగించుట పూర్తయినచో,

పైన, చివరన వచ్చిన ఘనము విలువ, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనము విలువ అవుతుంది.

6. కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు కూడా చేయవచ్చును.

పైన వివరించిన పద్ధతిలో ఘనము విలువను కనుగొనుటకు ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను ఎడమ వైపు నుండి కుడివైపునకు వినియోగిస్తూ ఘనము విలువను సాధించాము. ఇదే పద్ధతిని అనుసరించి, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు వినియోగిస్తూ కూడా ఘనము విలువను సాధించగలము.

ఉదాహరణ 1 : $12^3 = ?$

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 12
2. ఈ సంఖ్యలోని అంత్యాంకమును, ఆద్యాంకమును ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి గుర్తించవలెను.

   అంత్యాంకము = a = 1

   ఆద్యాంకము = b = 2
3. a,b అను రెండు అంకెలు గల సంఖ్య (ab) యొక్క ఘనములో వచ్చు పదములు ఇట్లుండును.

   $(ab)^3 = a^3 \mid 3a^2b \mid 3ab^2 \mid b^3$
4. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి వ్రాయగా

   $12^3 = 1^3 \mid 3.1^2.2 \mid 3.1.2^2 \mid 2^3$

   $= 1 \mid 6 \mid 12 \mid 8$

5. ఈ ఘనములోని పదములన్నిటిని ఒక్కొక్క స్థానము కుడివైపుకు జరిపి వ్రాసి కూడవలెను.

మొదటి పంక్తి	= 1				
రెండవ పంక్తి	=	6			
మూడవ పంక్తి	=	1	2		
నాల్గవ పంక్తి	=			8	
మొత్తం	**= 1**	**7**	**2**	**8**	

6. సమాధానం = 12^3 = 1728

ఉదాహరణ 2 = 125^3= ?

పద్ధతి :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 125
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలలో మూడు అంకెలు ఉన్నాయి.
3. ముందుగా ఎడమవైపు నుండి రెండు అంకెలను గ్రహించాలి.

   (=12)

   అంత్యాంకము =a =1

   ఆద్యాంకము = b =2
4. ab అను రెండు అంకెలు గల సంఖ్య (ab) యొక్క ఘనములో వచ్చు పదములు ఇట్లుండును.

   $(ab)^3 = a^3 | 3a^2b | 3ab^2 | b^3$
5. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి వ్రాయగా

   $12^3 = 1^3 | 3.1^2.2 | 3.1.2^2 | 2^3$

   $= 1 | 6 | 12 | 8$

6. పై విలువలను ఒక్కొక్క స్థానము కుడివైపుకు జరిపి వ్రాసి కూడాలి.

మొదటి పంక్తి =	1			
రెండవ పంక్తి =		6		
మూడవ పంక్తి =		1	2	
నాల్గవ పంక్తి =				8
	1	7	2	8

7. ఈ 12^3 ఘనము విలువను **X** లో ఉంచాలి.

X = 1728.

8. ఇచ్చిన సంఖ్యలో మూడవ అంకెను వినియోగించవలసి ఉంది. ఆ సందర్భంగా అంత్యాంకము (a) ఆద్యాంకము (b) ల విలువలను మార్చాలి.

9 (i) అంత్యాంకములో క్రొత్త విలువ = a

= ఇంతవరకు వినియోగించిన అంకెల సముహము = 12

(ii) ఆద్యాంకములో క్రొత్త విలువ = b

= వినియోగించవలసి ఉన్న అంకె =5

10. ఈ క్రింది విలువలను కనుగొనాలి.

(i) 3 * అంత్యాకము^{2} * ఆద్యాంకము = $3a^2b$

= $3*12^2*5$

= 2160

(ii) 3 * అంత్యాకము * ఆద్యాంకము^{2} = $3ab^2$ = $3*12*5^2$

= 3*12*25= 900

(iii) ఆద్యాంకము^{3} = b^3

= 5^3 = 125

11. ఇంతకు ముందు **X** లో ఉంచిన విలువను, పై మూడు విలువలను

ఒక్కొక్క స్థానం కుడి వైపుకు జరిపి వ్రాసి కూడాలి.

	1 7 2 8
	2 1 6 0
	9 0 0
	1 2 5
మొత్తం	1 9 5 3 1 2 5

12. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అన్ని అంకెలను వినియోగించుట పూర్తి అయినది.

13. సమాధానం = 125^3 = 1953125

ఉదాహరణ 3 :- 27^3 = ?

పద్ధతి :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 27

2. ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభిద్దాము.

3. అంత్యాంకము = a = 2

   ఆద్యాంకము = b = 7

4. $(ab)^3$ లో వచ్చు పదములు =

   $(ab)^3 = a^3 \mid 3a^2b \mid 3ab^2 \mid b^3$

5. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి వ్రాయగా,

   $27^3 = 2^3 \mid 3.2^2.7 \mid 3.2.7^2 \mid 7^3$

   $= 8 \mid 84 \mid 294 \mid 343$

6. ఈ విలువలను ఒక్కొక్క స్థానం కుడివైపు జరిపి వ్రాసి కూడాలి.

```
 8
 8 4
 2 9 4
   3 4 3
---------
19 6 8 3
---------
```

7. సమాధానం = 27^3 = 19683.

ఉదాహరణ 4 : 82^3 = ? (కుడివైపు నుండి ఎడమవైపుకు సాధింపుము)

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 82
2. ఆద్యాంకము =b=2

   అంత్యాంకము =a = 8
3. $(ab)^3$ లో వచ్చు పదములు = $(ab)^3 = a^3 \mid 3a^2b \mid 3ab^2 \mid b^3$

4. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి వ్రాయగా,

$82^3 = 8^3 \mid 3.8^2.2 \mid 3.8.2^2 \mid 2^3$

$= 512 \mid 384 \mid 96 \mid 8$

5. కుడివైపు నుండి సాధించుటకు, పై అంకెలను ఎడమవైపునకు జరుపుచూ వ్రాసి కూడాలి.

```
          8
       9 6
   3 8 4
 5 1 2
-----------
 5 5 1 3 6 8
-----------
```

6. సమాధానం = 82^3 = 551368.

83. ఘనములు - 4

(లీలావతి-సంఖ్యను రెండు భాగములుగా చేసి)

విషయం :- సంఖ్యల యొక్క ఘనములను కనుగొనుట

సూత్రం :- ఖండాభ్యాంవా హతో రాశి:

త్రిఘ్న: ఖండ ఘనైక్యయుక్

పదవిభాగం :- ఖండాభ్యాం, వా, హత:, రాశి:, త్రిఘ్న: , ఖండ ఘనైక్యయుక్

తా॥ ఘనము కన్గొనుటకు ఇచ్చిన సంఖ్యను రెండు ఖండములుగా చేయాలి. ఆ ఇచ్చిన సంఖ్యను, మొదటి ఖండముతోను, రెండవ ఖండముతోను, 3 తోను గుణించగా వచ్చు విలువకు, ఆ ఖండముల ఘనములను కలిపినచో, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనము వస్తుంది.

వివరణ:-

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను X అనుకొందాము
2. దానిని a,b అను రెండు ఖండములుగా చేయాలి.

   $X = a+b$

3. సూత్రం :

   $X^3 = X.a.b.3 + a^3+b^3$

   $= (a+b).\ a.b.3 + a^3+b^3$

   $= 3ab\ (a+b) + a^3 + b^3$

ఉదాహరణ 1 :- 9^3 = ?

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = X = 9
2. దానిని a,b అను రెండు ఖండాలుగా చేయాలి.

   $a = 5$

   $b = 4$

   $x=a+b = 5+4=9$

3. సూత్రం :

$X^3 = 3.a.b.X + a^3 + b^3$

$= 3.5.4.9 + 5^3 + 4^3$

$= 540 + 125 + 64$

$= 729$

ఉదాహరణ 2 : 27^3= ?

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = **X = 27**
2. దానిని a,b అను రెండు ఖండాలుగా చేయాలి.
   a = 20
   b= 7

3. సూత్రం :

X=a+b = 20+7=27

$X^3 = 3.a.b.X + a^3 + b^3$

$= 3ab(a+b) + a^3 + b^3$

$= 3.20.7.27 + 20^3 + 7^3$

$= 11340 + 8000 + 343$

$27^3 = 19683$

ఉదాహరణ 3 : 82^3 = ?

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 82
2. దానిని a,b అను రెండు ఖండాలుగా చేయాలి.
   a = 80,
   b= 2

X=a+b =80+2 = 82

3. సూత్రం :

$X^3 = 3.a.b.X + a^3 + b^3$

$= 3ab(a+b) + a^3 + b^3$

$= 3.80.2.82 + 80^3 + 2^3$

$= 39360 + 512000 + 8$

$82^3 = 551368$

ఉదాహరణ 4:

$112^3 = ?$

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = $x = 112$
2. దానిని a,b అను రెండు ఖండాలుగా చేయాలి.

a = 100
b = 12
x = a+b = 100+12 = 112

3. సూత్రం :

$X^3 = 3.a.b.X + a^3 + b^3$

$= 3ab(a+b) + a^3 + b^3$

$= 3.100.12.112 + 100^3 + 12^3$

$= 403200 + 1000000 + 1728$

$112^3 = 1404928$

84. ఘనములు–5 (లీలావతి-సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం ద్వారా)

విషయం : సంఖ్యల యొక్క ఘనములను కనుగొనుట.

సూత్రం : వర్గమూల ఘన: స్వ ఘ్నో
వర్గరాశే: ఘనో భవేత్ ॥

అర్థం : ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలమునకు ఘనమును కన్గొని, ఆ ఘనము యొక్క వర్గమును సాధించగా వచ్చు విలువ, ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనముతో సమానమగును.

వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య $=X= a^2$ అనుకొందాము.
2. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము $= (X)^{1/2} = a$
3. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనము

$(a^3)^2 = ((X)^{1/2})^2 = X^{(1/2)*3*2} = X^3 = (a^2)^3$

= (((ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం) యొక్క ఘనం) యొక్క వర్గము)

ఉదాహరణ 1 : $36^3 = ?$

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య $= X = a^2 = 36$
   2. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము $=a= (36)^{1/2} = 6$
   3. $X^3 = (a^2)^3 = (a^3)^2 = (6^3)^2 = (6\times6\times6)^2$
      $= (216)^2$
      $= 46656$
4. సమాధానం : $36^3 = 46656$

ఉదాహరణ 2 : $64^3 = ?$

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = $x = a^2 = 64$
2. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం $= a = (64)^{1/2} = 8$
3. ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క ఘనం $= x^3 = (a^3)^2$

$= (8^3)^2$

$= (8\times8\times8)^2$

$= (512)^2$

$= 262144$

4. సమాధానం : $64^3 = 262144$

అభ్యాసం :

శ్లో ॥ నవఘనం త్రిఘనస్య ఘనం తథా
కథయ పంచ ఘనస్య ఘనంచ మే
ఘన పదం చ తతోపి ఘనాత్ సఖే
యది ఘనేస్తి ఘనా భవతో మతి: ॥

అర్థం: ఓ మిత్రుడా ! నీ యొక్క బుద్ధి ఘనమునందు గొప్పదై ఉన్నచో, 9 యొక్కయు, 3 యొక్కయు ఘనము యొక్క ఘనమును, అట్లే 5 యొక్క ఘనము యొక్క ఘనమును నాకు తెల్పుము.

వివరణ : ఈ క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

$9^3 = ?$

$(3^3)^3 = ?$

$(5^3)^3 = ?$

పైన వివరించిన పద్ధతిని ఉపయోగించుకొని వీటి విలువలను కనుగొనవలెను.

85. ఘనమూలములు - 1 (కారణాంక పద్ధతి)

విషయం :- కారణాంక పద్ధతిలో ఘనమూలములను కనుగొనుట.

వివరణ :- ఇచ్చిన సంఖ్యకు కారణాంకములను కనుగొని, వాని సహాయముతో ఘనమూలములను కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ1 :- 474552 అను సంఖ్యకు ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$(474552)^{1/3} = ?$

పద్ధతి :

ఇచ్చిన సంఖ్యను ఏ సంఖ్యలు నిశ్శేషంగా భాగించగలవో గుర్తించి, వాటితో భాగించవలెను.

$474552 = 2\times2\times2\times3\times3\times3\times13\times13\times13$

$= 2^3 \times3^3\times13^3$

$= (2\times3\times13)^3$

$= (78)^3$

$(474552)^{1/3} = ((78)^3)^{1/3}$

$= 78$

సమాధానం :- 474552 అను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము = 78

ఉదాహరణ 2 :- 5832 అను సంఖ్యకు ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$(5832)^{1/3} = ?$

$5832=2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times3\times3$

$= 2^3\times3^6$

$(5832)^{1/3} = (2^3\times3^6)^{1/3} = 2\times3^2=2\times9=18$

86. ఘనమూలములు-2 (లీలావతి-సాధారణ పద్ధతి)

విషయం : ఘనమూలములను కన్గొనుట

సూత్రం : 1. ఆద్యం ఘనస్థాన మథాఘనే ద్వే
పునస్తథాంత్యాత్ ఘనతో విశోధ్య
ఘనం పృథక్స్థం పద మస్య కృత్యా
త్రిఘ్న్యా తదాద్యం విభజేత్ ఫలం తు ॥

2. పంక్త్యాం న్యసేత్ తత్కృతి మంత్యనిఘ్నీం
త్రిఘ్నీం త్యజేత్ తత్ప్రథమాత్ ఫలస్య
ఘనం తదాద్యాత్ ఘనమూల మేవం
పంక్తిర్భవే దేవ మత: పునశ్చ ॥

పదవిభాగం :

1. ఆద్యం, ఘనస్థానం, అథ, అఘనే, ద్వే,
పున: తథా, అంత్యాత్, ఘనత:, విశోధ్య,
ఘనం, పృథక్స్థం, పదం, అస్య, కృత్యా,
త్రిఘ్న్యా, తదా, ఆద్యం, విభజేత్, ఫలం, తు
2. పంక్త్యాం, న్యసేత్, తత్, కృతిం, అంత్యనిఘ్నీం
త్రిఘ్నీం, త్యజేత్, తత్, ప్రథమాత్, ఫలస్య
ఘనం, తత్, ఆద్యాత్, ఘనమూలం, ఏవం,
పంక్తి: భవేత్, ఏవం, అత:, పున:, చ ॥

అర్ధం & వివరణ :

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను కుడివైపు నుండి పరిశీలించాలి.
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడివైపు చిట్టచివరి అంకెను, అనగా ఒకట్ల స్థానమును

ఘనస్థానముగా గుర్తించుము. అ ఆంకెపై చుక్కను ఉంచుము. దానికి ఎడమవైపు రెండు స్థానములు " అఘన స్థానములు ". వాటిపై ఏ గుర్తును పెట్టవద్దు.

3. పై అంకెలకు ఎడమవైపు అంకె తిరిగి ఘన స్థానమగును. అక్కడ చుక్కను ఉంచుము. తిరిగి దాని ఎడమవైపు రెండు అఘన స్థానములను విడువవలెను. ఈ విధముగా ఘన స్థానములను, అఘన స్థానములను గుర్తించుట పూర్తి చేయాలి. (అనగా మూడేసి అంకెలలో, కుడివైపున చివరి అంకెపై మాత్రమే చుక్కను ఉంచాలి. మిగిలిన రెండింటిపై చుక్కలు పెట్టకూడదు. ఆ విధంగా అన్ని అంకెలను పూర్తి చేయాలి.)

4. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యను ఎడమవైపు నుండి పరిశీలించుము. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంత వరకు అంకెలను గ్రహించుము.

5. దానిలో x1లో పోయే పెద్ద ఘనము (a^3) ను తీసివేయాలి.
తీసివేయగా వచ్చిన ఫలితాన్ని x2 అనుకొనుము.
తీసివేసిన ఘనము (a^3) యొక్క ఘనమూలము (a) ను ఒక సమాధాన పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.

6. పై తీసివేత వలన వచ్చిన ఫలితానికి (x2కు), ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు నుండి వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను, జేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దీనిని x3 అనుకొనుము.

7. x3 ను $3a^2$ తో భాగించాలి. వచ్చిన భాగఫలమును 'b'అనుకొనుము. ఈ b యొక్క విలువను నిర్ధారించవలసి వున్నది. b యొక్క గరిష్ట విలువ 9 ఉండాలి.

8. x3లో $3ab^2$ ను తీసివేయాలి. ఫలితమును x4 అనుకొనుము.

9. దానికి (x4కు) పైన వినియోగించిన అంకె తర్వాతి కుడివైపు అంకెను చేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దానిని x5 అనుకొనుము.

10. x5 నుండి $3ab^2$ ను తీసివేయాలి. ఫలితము x6 అనుకొనుము.

11. దానికి, పైన వినియోగించిన అంకెకు కుడివైపున ఉన్న అంకెను చేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దానిని x7 అనుకొనుము.

12. x7 నుండి b^3ను తీసివేయాలి . ఫలితమును x8 అనుకొనుము.

13. పైన చేసిన మూడు తీసివేతలలో (అనగా, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3) ఏ స్థాయిలో నైనను తీసివేత సాధ్యము కానిచో, b యొక్క విలువను 1 తగ్గించి, తిరిగి 8వ స్టెప్పు నుండి చేయాలి.

14. పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినచో, ఆ b యొక్క విలువ నిర్ధారణ అయినట్లు అనుకోవాలి. ఆ b విలువను సమాధాన పంక్తిలో ఉంచిన 'a' కి కుడివైపున జేర్చి వ్రాయాలి.

15. ఆ సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న (ab) విలువ ఇంతవరకు వినియోగించిన అంకెలతో ఏర్పడే సంఖ్య యొక్క ఘనమూలము అగును.

16. ఇచ్చిన సంఖ్యలో, ఇంకను వినియోగించవలసిన అంకెలు ఉన్నచో, a యొక్క విలువను దిగువన సూచించిన విధంగా మార్చి తిరిగి పై ప్రక్రియను కొనసాగించవలసి ఉంది.

17. సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న (అనగా, పాత ab యొక్క) విలువను a యొక్క క్రొత్త విలువగా తీసుకోవాలి.

18. x8 లో ఉన్న విలువకు, ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను చేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దానిని x1 అనుకొనుము.

19. తిరిగి 5 వ స్టెప్పు నుండి చేయాలి.

20. ఈ విధంగా మరల మరల చేయగా, ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము వస్తుంది.

21. జ్ఞాపకం ఉంచుకొనుటకు ప్రధానమైన అంశాలు.

1. చుక్కలు పెట్టుట, 2. $(a+b)^3$ అనే సూత్రాన్ని వ్రాసుకొనుట, 3. (a,a^3) పట్టికను సిద్ధంచేసికొని ఉంచుట, 4. a^3ను కనుగొనుట, 5. bను కనుగొనుట
6. అంకెలను దించుకొంటూ $3a^2b,3ab^2,b^3$ లను తీసివేయుట, 7. a,b లను ప్రక్కప్రక్కన వ్రాసుకొనుట.

సూచన : ఇచ్చిన సంఖ్యలకు ఘనమూలములను కనుగొనుటకు 1 నుండి 10 వరకు గల సంఖ్యల యొక్క ఘనములు తెలిసి ఉండాలి. దాని కొరకు ఈ క్రింది పట్టికను వినియోగించుకోవలెను.

పట్టిక : 1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యల ఘనములు, ఘనమూలములు

ఘనము సంఖ్య (a^3)	**ఘనమూలము సంఖ్య** (a)
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
216	6
343	7
512	8
729	9
1000	10

ఉదాహరణ 1 : 9261 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 9261
2. కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, ఘనస్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము.

$\dot{9}26\dot{1}$

3. ఈ సంఖ్యలోని అంకెలు ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి వినియోగించబడును.

4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 9
దానిని x1 అనుకొనుము.
x1 = 9

5. ఘనములు - ఘనమూలముల పట్టిక సహాయంతో గుర్తించిన, x1లో
పోయే పెద్ద ఘనము = a^3 = 8
దాని ఘనమూలము = a = 2
సమాధాన పంక్తిలో a ను వ్రాసుకోవాలి.
సమాధాన పంక్తి = 2

6. x1 నుండి a^3 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 = 9-8=1
x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=2) ను కుడివైపున
జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.
x3 = 12

7. x3 ను $3a^2$ ($=3*2^2=12$) తో భాగించగా, భాగఫలము 1 వస్తుంది.
b =1 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

8. $x4=x3-3a^2b = 12-3*2^2*1= 12-12=0$
x4=0

9. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (6) ను జేర్చి వ్రాయాలి.
x5 = 06= 6

10. $x6= x5-3ab^2 = 6-3*2*1^2=0$
x6 = 0

11 x6 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకె (1) ను చేర్చి వ్రాయాలి.
x7=01=1

12 $x8 =x7-b^3 = 1-1^3=1-1=0$
x8=0

13 పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ =1

నిర్ధారించబడినది.

14 సమాధాన పంక్తి =ab = 21

15 ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగులలేదు. కావున సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలముగా తీసుకోవాలి.

9261 యొక్క ఘనమూలము = 21

16 పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^3 = 8$	$\dot{9}$ 2 6 $\dot{1}$	a = 2
	8	సమాధాన పంక్తి = 2
$3a^2=3*2^2=12$	1 2	b = 1 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b = 12$	1 2	
	0 6	
$3ab^2 = 3*2*1=6$	6	
	0 1	
$b^3=1^3=1$	1	
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 21

9261 యొక్క ఘనమూలము = 21

ఉదాహరణ 2 : 32768 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 32768
2. కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, ఘనస్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము.

   32768 (చుక్కలు 7 మరియు 2 పై)

3. ఈ సంఖ్యలోని అంకెలు ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి వినియోగించబడును.
4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 32
   దానిని x1 అనుకొనుము.
   x1 = 32
5. ఘనములు - ఘనమూలముల పట్టిక సహాయంతో గుర్తించిన, x1లో పోయే పెద్ద ఘనము = a^3 = 27
   దాని ఘనమూలము = a = 3
   సమాధాన పంక్తిలో a ను వ్రాసుకోవాలి.
   సమాధాన పంక్తి = 3
6. x1 నుండి a^3 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 = 32−27=5
   x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=7) ను కుడివైపున జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.
   x3 = 57
7. x3 ను $3a^2$ ($=3*3^2=27$) తో భాగించగా, భాగఫలము 2 వస్తుంది.
   b =2 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)
8. $x4=x3-3a^2b = 57-3*3^2*2= 57-54=3$
   x4=3
9. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (6) ను జేర్చి వ్రాయాలి.
   x5 = 36
10. $x6= x5-3ab^2 = 36-3*3*2^2=36-36=0$
    x6 = 0

11 x6 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకె (8) ను చేర్చి వ్రాయాలి.
   x7=08=8

12 $x8 =x7-b^3 = 8-2^3=8-8=0$
   x8=0

13 పైన చేసిన తీసివేతలు అన్నియు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ =2 నిర్ధారించబడినది.

14 సమాధాన పంక్తి =ab = 32

15 ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగులలేదు. కావున సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలముగా తీసుకోవాలి.

32768 యొక్క ఘనమూలము = 32

16 పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^3 = 27$	3 2̇ 7 6 8̇	a = 3
	2 7	సమాధాన పంక్తి = 3
$3a^2=3*3^2=27$	5 7	b = 2 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b =3*3^2*2 = 54$	5 4	
	3 6	
$3ab^2 = 3*3*2^2=36$	3 6	
	0 8	
$b^3=2^3=8$	8	b విలువ నిర్ధారింపబడింది.
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 32

32768 యొక్క ఘనమూలము = 32

ఉదాహరణ3: 19683 యొక్క ఘనమూలము కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 19683
2. కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, ఘనస్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము.

   19683 (చుక్కలు 9 మరియు 8 పై)

3. ఈ సంఖ్యలోని అంకెలు ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి వినియోగించబడును.

4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 19
   దానిని x1 అనుకొనుము.
   x1 = 19
5. ఘనములు – ఘనమూలముల పట్టిక సహాయంతో గుర్తించిన, x1లో
   పోయే పెద్ద ఘనము = a^3 = 8
   దాని ఘనమూలము = a = 2
   సమాధాన పంక్తిలో a ను వ్రాసుకోవాలి.
   సమాధాన పంక్తి = 2
6. x1 నుండి a^3 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 = 19–8=11
   x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=6) ను కుడివైపున
   జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.
   x3 = 116
7. x3 ను $3a^2$ ($=3*2^2=12$) తో భాగించగా, భాగఫలము 9 వస్తుంది.
   b =9 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)
8. $x4=x3-3a^2b = 116-3*2^2*9= 116-108=8$
   x4=8
9. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (8) ను జేర్చి వ్రాయాలి.
   x5 = 88
10. $x6= x5-3ab^2 = 88-3*2*9^2=88-6*81=88-486$

తీసివేత విజయవంతం కాలేదు.

11. అందుచేత bని 1 తగ్గించవలెను.

$b = 9-1= 8$

12. b యొక్క క్రొత్త విలువను ఉపయోగిస్తూ, తిరిగి 8వ స్టెప్ నుండి చేయాలి.

$x4=x3-3a^2b = 116-3*2^2*8= 116-96=20$

$x4=20$

13. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (8) ను జేర్చి వ్రాయాలి.

$x5 = 208$

14. $x6= x5-3ab^2 = 208-3*2*8^2=208-6*64=208-384$

ఇప్పుడు కూడ తీసివేత విజయవంతం కాలేదు.

15 అందుచేత bని మరల 1 తగ్గించవలెను.

$b = 8-1= 7$

16. b యొక్క క్రొత్త విలువను ఉపయోగిస్తూ, తిరిగి 8వ స్టెప్ నుండి చేయాలి.

$x4=x3-3a^2b = 116-3*2^2*7= 116-84=32$

$x4=32$

17. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (8) ను జేర్చి వ్రాయాలి.

$x5 = 328$

18. $x6= x5-3ab^2 = 328-3*2*7^2=328-6*49=328-294=34$

19 x6 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకె (3) ను చేర్చి వ్రాయాలి.

$x7=343$

20 $x8 =x7-b^3 = 343-7^3=343-343=0$

$x8=0$

21 పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ =7 నిర్ధారించబడినది.

22 సమాధాన పంక్తి =ab = 27

23 ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగులలేదు. కావున సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలముగా తీసుకోవాలి.

19683 యొక్క ఘనమూలము = 27

$a^3 = 8$	1 9 6 8 3 (dots over 1 and 3)	a = 2
	8	సమాధాన పంక్తి = 2
$3a^2=3*2^2=12$	1 1 6	b = 9 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b =3*2^2*9 =108$	1 0 8	
	8 6	
$3ab^2 = 3*2*9^2=486$	4 8 6	తీసివేయడం సాధ్యంకాలేదు.
	1 1 6	b = 8 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b =3*2^2*8 =96$	9 6	
	2 0 8	
$3ab^2 = 3*2*8^2=384$	3 8 4	తీసివేయడం సాధ్యంకాలేదు.
	1 1 6	b = 7 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b =3*2^2*7 =84$	8 4	
	3 2 8	
$3ab^2 = 3*2*7^2=294$	2 9 4	
	3 4 3	
$b^3 =7^3=343$	3 4 3	b విలువ నిర్ధారింపబడింది
	0	
		సమాధాన పంక్తి = ab = 27

19683 యొక్క ఘనమూలము = 27

ఉదాహరణ 4 : 1953125 యొక్క ఘనమూలము కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 1953125
2. కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, ఘనస్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము.

   $\dot{1}95\dot{3}12\dot{5}$

   1953125
3. ఈ సంఖ్యలోని అంకెలు ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి వినియోగించబడును.
4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 1

   దానిని x1 అనుకొనుము.

   x1 = 1
5. ఘనములు – ఘనమూలముల పట్టిక సహాయంతో గుర్తించిన, x1లో పోయే పెద్ద ఘనము = a^3 = 1

   దాని ఘనమూలము = a = 1

   సమాధాన పంక్తిలో a ను వ్రాసుకోవాలి.

   సమాధాన పంక్తి = 1
6. x1 నుండి a^3 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 = 1–1=0

   x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=9) ను కుడివైపున జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

   x3 = 09
7. x3 ను $3a^2$ ($=3*1^2=3$) తో భాగించగా, భాగఫలము 3 వస్తుంది.

   b =3 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)
8. $x4=x3-3a^2b = 9-3*1^2*3= 9-9=0$

   x4=0
9. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (5) ను జేర్చి వ్రాయాలి.

$x5 = 05 = 5$

10. $x6 = x5 - 3ab^2 = 5-3*1*3^2=5-27$

తీసివేత విజయవంతం కాలేదు.

11. అందుచేత bని 1 తగ్గించవలెను.

$b = 3-1= 2$

12. b యొక్క క్రొత్త విలువను ఉపయోగిస్తూ, తిరిగి 8వ స్టెప్ నుండి చేయాలి.

$x4=x3-3a^2b = 9-3*1^2*2= 9-6=3$

$x4=3$

13. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (5) ను జేర్చి వ్రాయాలి.

$x5 = 35$

14. $x6= x5-3ab^2 = 35-3*1*2^2=35-3*4=35-12=23$

15 x6 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకె (3) ను చేర్చి వ్రాయాలి.

$x7=233$

16 $x8 =x7-b^3 = 233-2^3=233-8=225$

$x8=225$

17 పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ =2 నిర్ధారించబడినది.

18 సమాధాన పంక్తి =ab = 12

19 వినియోగించవలసిన అంకెలు ఇంకను మిగిలి ఉన్నవి.

20 a యొక్క క్రొత్త విలువ = సమాధాన పంక్తి

$a = 12$

21 x8లోని విలువను x3గా తీసుకోవాలి.

$x3=225$

దీనికి వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=1) ను జేర్చివ్రాయాలి.

$x3=2251$

22 తిరిగి 5వ స్టెప్ నుండి చేయాలి.

23 x3 ను $3a^2$ ($=3*12^2= 3*144=432$) తో భాగించగా, భాగఫలము 5 వస్తుంది.

b =5 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

24 $x4=x3-3a^2b = 2251-3*12^2*5= 2251-2160=91$

x4=91

25. x4 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకెను (2) ను జేర్చి వ్రాయాలి.

x5 = 912

26 $x6= x5-3ab^2 = 912-3*12*5^2=912-3*12*25=912-900=12$

x6 = 12

27 x6 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాత అంకె (5) ను చేర్చి వ్రాయాలి.

x7=125

28 $x8 =x7-b^3 = 125-5^3=125-125=0$

x8=0

29 పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ =5 నిర్ధారించబడినది.

30 సమాధాన పంక్తి =ab = 125

31 ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగులలేదు. కావున సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలముగా తీసుకోవాలి.

1953125 యొక్క ఘనమూలము = 125

32 పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^3 = 1$	1̇ 9 5 3̇ 1 2 5̇	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
$3a^2=3*1^2=3$	0 9	b = 3 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
$3a^2b =3*1^2*3 =9$	9	
	0 5	
$3ab^2 = 3*1*3^2=27$	2 7	తీసివేత సాధ్యం కాలేదు.
	0 9	b = 3-1= 2
$3a^2b =3*1^2*2 =6$	6	(విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
	3 5	
$3ab^2 = 3*1*2^2=12$	1 2	
	2 3 3	
$b^3 =2^3=8$	8	b విలువ నిర్ధారింపబడింది
	2 2 5	సమాధాన పంక్తి = 12
$3a^2=3*12^2=432$	2 2 5 1	a = 12
$3a^2b =3*12^2*5 =2160$	2 1 6 0	b = 5 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
	9 1 2	
$3ab^2 = 3*12*5^2=900$	9 0 0	
	1 2 5	
$b^3 =5^3=125$	1 2 5	b విలువ నిర్ధారింపబడింది
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 125

1953125 యొక్క ఘనమూలము = 125

ఉదాహరణ 5 : 4913 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$a^3 = 1$	$\dot{4}\ 9\ 1\ \dot{3}$	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
$3a^2=3*1^2=3$	3 9	b = 13
$3a^2b = 3*9=27$	2 7	b = 9 (గరిష్ఠ విలువ)
	1 2 1	
$3ab^2 = 3*1*9^2=243$	2 4 3	తీసివేత సాధ్యము కాలేదు
	3 9	b = 8
$3a^2b = 3*1^2*8=24$	2 4	
	1 5 1	
$3ab^2 = 3*1*8^2=92$	1 9 2	తీసివేత సాధ్యము కాలేదు
	3 9	b = 7
$3a^2b = 3*1^2*7=21$	2 1	
	1 8 1	
$3ab^2 = 3*1*7^2=147$	1 4 7	
	3 4 3	
$b^3 = 7^3=343$	3 4 3	b = 7 నిర్ధారించబడినది
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 17

4913 యొక్క ఘనమూలము = 17

ఉదాహరణ 6 : 36926037 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$a^3 = 27$	$\dot{3}\ 6\ 9\ \dot{2}\ 6\ 0\ \dot{3}\ 7$	a = 3
	2 7	సమాధాన పంక్తి = 3
		b = 3
$3a^2=3*3^2=27$	9 9	
$3a^2b = 3*9*3=81$	8 1	
	1 8 2	
$3ab^2 = 3*3*3^2=81$	8 1	
	1 0 1 6	
$b^3 = 3^3=27$	2 7	
	9 8 9	
$3a^2=3*33^2=3267$	9 8 9 0	a = 33
$3a^2b = 3*3267=9801$	9 8 0 1	సమాధాన పంక్తి = 33 b = 3
	8 9 3	
$3ab^2 = 3*33*3^2=891$	8 9 1	
	2 7	
$b^3 = 3^3=27$	2 7	
	0	b = 3 నిర్ధారించబడినది
		సమాధాన పంక్తి = ab = 333

36926037యొక్క ఘనమూలము = 333

ఉదాహరణ 7 : 77308776 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$a^3 = 64$	$7\,\dot{7}\,3\,0\,\dot{8}\,7\,7\,\dot{6}$	a = 4
	6 4	సమాధాన పంక్తి = 4
		b = 2
$3a^2=3*16=48$	1 3 3	
$3a^2b = 3*16*2=96$	9 6	
	3 7 0	
$3ab^2 = 3*4*2^2=48$	4 8	
	3 2 2 8	
$b^3 = 2^3=8$	8	
	3 2 2 0	
$3a^2=3*42^2=5292$	3 2 2 0 7	a = 42
$3a^2b = 5292*6=31752$	3 1 7 5 2	సమాధాన పంక్తి = 42 b = 6
	4 5 5 7	
$3ab^2 = 3*42*6^2=4536$	4 5 3 6	
	2 1 6	
$b^3 = 6^3=216$	2 1 6	
	0	b = 6 నిర్ధారించబడినది
		సమాధాన పంక్తి = ab = 426

77308776 యొక్క ఘనమూలము = 426

ఉదాహరణ 8 : 10.000 000 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

$a^3 = 8$	1 0. 0 0 0 0 0 0	a = 2. సమాధాన పంక్తి = 2
	8	b = 1
$3a^2=3*2^2=12$	2 0	
$3a^2b = 3*4*1=12$	1 2	
	8 0	
$3ab^2 = 3*2*1^2=6$	6	
	7 4 0	
$b^3 = 1^3=1$	1	
	7 3 9	ab = 21
$3a^2=3*21^2=1323$	7 3 9 0	a = 2.1
$3a^2b = 6615$	6 6 1 5	సమాధాన పంక్తి = 21 b = 5
	7 7 5 0	
$3ab^2 = 3*21*25=1575$	1 5 7 5	
	6 1 7 5 0	
$b^3 = 5^3=125$	1 2 5	b = 5 నిర్ధారించబడినది
	6 1 6 2 5	సమాధాన పంక్తి = ab = 2.15

ఈ ప్రక్రియను ఇంకను కొనసాగించవచ్చును.

10 యొక్క ఘనమూలము = 2.1 (మొదటి దశాంశ స్థానము వరకు సవరించబడినది)

10 యొక్క ఘనమూలము = 2.15 (రెండు దశాంశ స్థానముల వరకు సవరించబడినది)

87. ఘనమూలములు-3 (గ్రూపు పద్ధతి)

విషయం : ఘనమూలములను కనుగొనుట

విశేషలక్షణం : గ్రూపు పద్ధతిలో ఘనమూలములోని అంకెలను గుర్తించుట

విశేష వివరణ :

1. ఘనమూలములోని అంకెలను నిర్ధారించుట పూర్వము వివరించినట్లుగా a,b ల సహహాయముతోనే జరుగును.
2. a యొక్క విలువను గుర్తించుట ,b యొక్క విలువను గుర్తించుట పూర్వము వివరించినట్లు గానే ఉంటుంది. (పూర్వ పద్ధతిలోని 1నుండి 8వ స్టెప్పు వరకు 14 నుండి 20 స్టెప్పు వరకు అదే విధంగా ఉంటాయి.
3. కాని b యొక్క విలువను నిర్ధారించుటలో మాత్రము తేడా ఉంటుంది. పూర్వము వివరించిన పద్దతిలో , ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒక్కొక్క అంకెను ఒక్కొక్కటిగా చేర్చకుంటూ మూడుసార్లు విడివిడిగా తీసివేత చేయుట జరిగింది. మొదటి సారి $3a^2b$ను, రెండవసారి $3ab^2$ను, మూడవసారి b^3 ను తీసివేసితిమి. ఏ స్థాయిలోనైనను తీసివేత సాధ్యము కానిచో, b యొక్క విలువను ఒక్కటి తగ్గించుకొని, వెనుకటి స్టెప్పుల నుండి ప్రారంభించుట జరిగింది. ప్రస్తుత పద్ధతిలో bని దీని తాత్కాలికంగా కనుగొన్న తర్వాత, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని రెండు అంకెలను ఒక్కసారిగా చేర్చుకొని, ($3a^2b$ విలువ $+3ab^2$ విలువ $+b^3$ విలువ) ను ఒక్కసారి తీసివేయడానికి ప్రయత్నిద్దాము. తీసివేత సాధ్యము కానిచో, b యొక్క విలువను ఒక్కటి తగ్గించుకొని, వెనుకటి స్టెప్పునుండి ప్రారంభించాలి.(అనగా, 9 నుండి 13వ స్టెప్పు వరకు మార్పు ఉంటుంది).

ప్రస్తుత పద్ధతి :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్యను కుడివైపు నుండి పరిశీలించాలి.
2. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని కుడివైపు చివరి అంకెను, అనగా ఒకట్ల

స్థానమును ఘనస్థానముగా గుర్తించుము. అ ఆంకెపై చుక్కను ఉంచుము. దానికి ఎడమవైపు రెండు స్థానములు " అఘన స్థానములు ". వాటిపై ఏ గుర్తు ను పెట్టవద్దు.

3. పై అంకెలకు ఎడమవైపు అంకె తిరిగి ఘన స్థానమగును. అక్కడ చుక్కను ఉంచుము. తిరిగి దాని ఎడమవైపు రెండు అ ఘన స్థానములను విడువవలెను. ఈ విధముగా ఘన స్థానములను, అ ఘన స్థానములను గుర్తించుట పూర్తి చేయాలి. (అనగా మూడేసి అంకెలలో, కుడివైపున చివరి అంకెపై మాత్రమే చుక్కను ఉంచాలి. మిగిలిన రెండింటిపై చుక్కలు పెట్టకూడదు. ఆ విధంగా అన్ని అంకెలను పూర్తి చేయాలి.)

4. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యను ఎడమవైపు నుండి పరిశీలించుము. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంత వరకు అంకెలను గ్రహించుము. దానిని x1అనుకొనుము

5. దానిలో (x1లో) పోయే పెద్ద ఘనము (a^3) ను తీసివేయాలి. తీసివేయగా వచ్చిన ఫలితాన్ని x2 అనుకొనుము.
తీసివేసిన ఘనము (a^3) యొక్క ఘనమూలము (a) ను ఒక సమాధాన పంక్తిలో వ్రాసుకోవాలి.

6. పై తీసివేత వలన వచ్చిన ఫలితానికి (x2కు), ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు నుండి వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను, జేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దీనిని x3 అనుకొనుము.

7. x3 ను $3a^2$ తో భాగించాలి. వచ్చిన భాగఫలమును 'b'అనుకొనుము. ఈ b యొక్క విలువ నిర్ధారించవలసి వున్నది. b యొక్క గరిష్ట విలువ 9 ఉండాలి.

8. x3 కు, ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఎడమవైపు నుండి వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు రెండు అంకెలను ఒక్కసారిగా చేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దానిని x4 అనుకొందాము.

9. ఇప్పుడు ఉన్న a,b ల విలువలతో $3a^2b$,$3ab^2$,b^3 ల విలువలను కనుగొనాలి.

10. ఈ మూడు విలువలను అదే వరుసలో ఒక్కొక్క స్థానం కుడివైపుకు జరిపి కూడాలి. వచ్చిన విలువను Y1 అనుకొందాము.

11. x4 నుండి Y1 ను తీసివేయటకు ప్రయత్నించాలి.

    x5 = x4–Y1

12. x4 నుండి Y1 ను తీసివేయుట సాధ్యం కానిచో,

    (i) b యొక్క విలువను ఒక్కటి తగ్గించాలి.

    b = b–1

    (ii) పైన 8వ స్టెప్పులో లభించిన x4 విలువనే మరల గ్రహించాలి.

    (iii) 9వ స్టెప్పు నుండి మరల చేయాలి.

13. పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినచో, ఆ b యొక్క విలువ నిర్ధారణ అయినట్లు అనుకోవాలి. ఆ b విలువను సమాధాన పంక్తిలో ఉంచిన 'a' కి కుడివైపున జేర్చి వ్రాయాలి.

14. ఆ సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న (ab) విలువ ఇంతవరకు వినియోగించిన అంకెలతో ఏర్పడే సంఖ్య యొక్క ఘనమూలము అగును.

15. ఇచ్చిన సంఖ్యలో, ఇంకను వినియోగించవలసిన అంకెలు ఉన్నచో, a యొక్క విలువను దిగువన సూచించిన విధంగా మార్చి తిరిగి పై ప్రక్రియను కొనసాగించవలసి ఉంది.

16. సమాధాన పంక్తిలో ఉన్న (అనగా,పాత ab యొక్క) విలువను a యొక్క క్రొత్త విలువగా తీసుకోవాలి.

17. x5 లో ఉన్న విలువకు, ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించిన అంకెల తర్వాతి కుడివైపు అంకెను చేర్చి వ్రాసుకోవాలి. దానిని x1 అనుకోవాలి.

18. తిరిగి 5వ స్టెప్పు నుండి చేయాలి.

19. ఈ విధంగా మరల మరల చేయగా ఘనమూలము వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 : 9261 యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 9261
2. కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, ఘనస్థానములపై చుక్కలను ఉంచుము.

   $\dot{9}26\dot{1}$

3. ఈ సంఖ్యలోని అంకెలు ఎడమవైపు నుండి ప్రారంభించి వినియోగించబడును.
4. ఎడమవైపు నుండి మొదటి చుక్క ఉన్నంతవరకు అంకెలు = 9

   దానిని x1 అనుకొనుము.

   x1 = 9

5. ఘనములు – ఘనమూలముల పట్టిక సహాయంతో గుర్తించిన, x1లో పోయే పెద్ద ఘనము = a^3 = 8

   దాని ఘనమూలము = a = 2

   సమాధాన పంక్తిలో a ను వ్రాసుకోవాలి.

   సమాధాన పంక్తి = 2

6. x1 నుండి a^3 ను తీసివేయగా వచ్చు ఫలితము = x2 = 9–8=1

   x2 కు, వినియోగించవలసిన తర్వాతి అంకె (=2) ను కుడివైపున జేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

   x3 = 12

7. x3 ను $3a^2$ ($=3*2^2=12$) తో భాగించగా, భాగఫలము 1 వస్తుంది.

   b =1 (నిర్ధారించవలసి ఉంది)

8. x3 కు , ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఎడమవైపునుండి వినియోగించిన అంకెల

తర్వాతి కుడివైపు రెండు అంకెలను (“61”) ఒక్కసారిగా చేర్చి వ్రాసుకోవాలి.

x4 =1261

9. ఇప్పుడు ఉన్న a,b ల విలువతో $3a^2b$,$3ab^2$,b^3 ల విలువలను కనుగొని, అదే వరుసలో ఒక్కొక్క స్థానం కుడి వైపుకు జరిపి, వ్రాసుకోవాలి.

a=2

b=1

$3a^2b= 3*2^2*1 = 1\ \ 2$

$3ab^2= 3*2*1^2 = \quad 6$

$b^3= 1^3 = \quad\quad 1$

10. ఈ మూడు విలువలను కూడాలి.

Y1= 1 2 6 1

Y1= 1261

11. x4 నుండి Y1 ను తీసివేయాలి.

12. x5 = 1261–1261 = 0

13. పైన చేసిన తీసివేతలు విజయవంతమయినవి గనుక b యొక్క విలువ (1) నిర్ధారించబడినది.

14. సమాధాన పంక్తి =ab = 21

15. ఇచ్చిన సంఖ్యలో వినియోగించవలసిన అంకెలు ఏమియు మిగులలేదు. కావున సమాధాన పంక్తిలోని సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలముగా తీసుకోవాలి.

9261 యొక్క ఘనమూలము = 21

16. పైన వ్రాసిన పద్ధతిని ఈ క్రింది విధముగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$a^3 = 8$	$\dot{9}\ 2\ 6\ \dot{1}$ 8	a = 2 సమాధాన పంక్తి = 2
$3a^2=3*2^2=12$	1 2	b = 1 (విలువ నిర్ధారింపబడవలసి ఉన్నది.)
	1 2 6 1	
$3a^2b = 3*2^2*1 =$ 1 2 $3ab^2 = 3*2*1^2 =$ 6 $b^3 = 1^3 =$ 1 Y_1 = 1 2 6 1	1 2 6 1	b = 1 (నిర్ధారింపబడింది)
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 21

9261 యొక్క ఘనమూలము = 21

మిగిలిన ఉదాహరణలను పై విధంగానే చేయవచ్చును.

88. ఘనమూలములు-4 (ఆరంకెలవరకు గల సంఖ్యలకు)

విషయం : ఆరంకెల వరకు గల సంఖ్యలకు పట్టిక పద్ధతిలో ఘనమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు:

1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి ఆరు అంకెలకు మించని సంఖ్యకు ఘనమూలమును కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఇందులో రాబోయే ఘనమూలము రెండు అంకెలకు మించి ఉండదు.
3. ఈ పద్ధతి భిన్నములులేని, పూర్ణాంకములు గల ఘనమూలములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

పద్ధతి :-

1. ఈ పద్ధతిలో రెండు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది.

(ఎ). 1 నుండి 10వరకు గల సంఖ్యల యొక్క ఘనములను కనుగొనండి.

(బి) అనగా, ఇప్పుడు లభించిన ఘనములకు 1 నుండి 10వరకు గల సంఖ్యలు, అదే క్రమంలో , ఘనమూలములవుతాయి.

(సి) ఈ ఘనములను మొదటి నిలువు వరుసలోను, వాటికి సంబంధించిన ఘనమూలములను రెండవ నిలువు వరుసలోను ఉందునట్లు ఒక పట్టికను తయారుచేయండి.(పట్టిక-1).

పట్టిక1:1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యల ఘనములు, ఘనమూలములు

ఘనము సంఖ్య (a^3)	ఘనమూలము సంఖ్య (a)
1	1
8	2
27	3
64	4

125	5
216	6
343	7
512	8
729	9
1000	10

2. పట్టిక –2 ను తయారు చేయుట :

(ఎ) ఘనము విలువలలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెకును, 1 నుండి 9 వరకు ఉన్న అంకెలకును ఉన్న సంబంధమును చూపించు ఒక పట్టిక తయారు చేయాలి. (పట్టిక–2)

పట్టిక –2: – పట్టిక సహాయముతో తయారయిన ఘనము, ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెలు

ఘనము విలువలోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె	**ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె**
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9
0	0

3. (ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య(అనగా,ఘనము)లోని అంకెలను కుడివైపునుండి ఎడమవైపునకు, అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి

అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయాలి.

(బి) ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఆరు అంకెలలోపు ఉన్నపుడు, రెండు గ్రూపులు మాత్రమే ఏర్పడతాయి.

(సి) అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపును x గ్రూపు అనియు, కుడివైపున ఉన్న గ్రూపును y గ్రూపు అనియు అనుకొందాము.

(డి) ఇచ్చిన సంఖ్య (= ఘనము) =xy అని వ్రాసుకోవచ్చు.

4.(ఎ) ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) x గ్రూపులోని సంఖ్యను పట్టిక –1లోని ఘనము విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

(సి) x గ్రూపులోని సంఖ్యకు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(డి) ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను గ్రహించాలి.

(ఇ) ఈ చిన్న సంఖ్యను ఘనముగా భావించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక –1నుండి తీసుకోవాలి.
దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

5. (ఎ) ఇప్పుడు , ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (=y)లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను గుర్తించాలి.

(సి) పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న ఘనమూలములోని ఒకట్లస్థానంలోని అంకెను గ్రహించాలి. దానిని 'b' గా వ్రాసుకోవాలి.

6. ఇప్పుడు a,b ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము వస్తుంది.

ఉదాహరణ :1 50653 అను సంఖ్య యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :1

(ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య = 50653

(బి) ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను కుడివైపు నుండి అనగా ఒకట్ల స్థానము నుండి, మూడేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా ఈ క్రింది విధముగా వస్తాయి.

ఎడమ వైపు గ్రూపు = x = 50

కుడివైపు గ్రూపు = y = 653

2.(ఎ) ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) x గ్రూపులోని సంఖ్య (=50) ను పట్టిక –1లోని ఘనము విలువలతో పోల్చి చూడవలెను.

(సి) 50కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(డి) 50కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య =27

50 కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య =64

(ఇ) ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, చిన్న సంఖ్యను (=27) గ్రహించాలి.

(ఎఫ్) ఈ సంఖ్యను (=27) ఘనముగా భావించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక–1 నుండి తీసుకోవాలి (=3). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

a =3

3.(ఎ) ఇప్పుడు ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపు గ్రూపు (y) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

(బి) y = 653

(సి) ఈ సంఖ్యలో ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె =3

(డి) పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఇచ్చిన ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె (=7)ను గ్రహించాలి. దానిని 'b' గా వ్రాసుకోవాలి.

(ఇ) ఇప్పుడు a(=3),b (=7) లను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము వస్తుంది.

5. సమాధానం :- ఘనమూలం = a b

= 3 7

ఉదాహరణ 2 : 10648 అను సంఖ్య యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి అంకెల చొప్పున x y గ్రూపులను వ్రాసుకోవాలి.

x = 10

y= 648

2.(ఎ) గ్రూపులోని సంఖ్య (=10) ను పట్టిక -1లోని ఘనము విలువలతో పోల్చి, x (=10)కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(బి) 10కి దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య =8

10కి దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 27

(సి) వీటిలో చిన్న సంఖ్యను (=8) గ్రహించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక -1 నుండి తీసుకోవాలి. (=2) దానిని a అనుకొందాము.

(డి) a=2

3.(ఎ) y గ్రూపులోని సంఖ్య (=648)లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె (=8) ను తీసుకొని పట్టిక -2 సహాయంతో, ఈ అంకెకు ఎదురుగా ఉన్న ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె (=2)ను గ్రహించాలి. దానిని 'b' అనుకొందాము.

(బి) b=2

4. సమాధానం :- ఘనమూలం = a b

= 2 2

ఉదాహరణ 3:– 474552 అను సంఖ్య యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :–

1. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి అంకెల చొప్పున x,y గ్రూపులను వ్రాసుకోవాలి.

2. (ఎ). x గ్రూపులోని సంఖ్య (=474) ను పట్టిక –1 లోని ఘనము విలువలతో పోల్చి x (=474) కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

(బి) 474 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 343

474 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య =512

(సి) వీటిలో చిన్న సంఖ్యను (=343) గ్రహించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి. (=7) దానిని 'a' అనుకొందాము.

(డి) a = 7

3. (ఎ) y గ్రూపులోని సంఖ్య (=552) లోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె (=2)ను తీసుకొని, పట్టిక –2 సహాయంతో, ఈ అంకెకఊ ఎదురుగా ఉన్న ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె (=8) ను గ్రహించాలి. దానిని 'b' అనుకొందాము.

(బి) b = 8

4. సమాధానం :– ఘనమూలం = a b

= 7 8

89. ఘనమూలములు-5 (తొమ్మిదంకెలవరకు గల సంఖ్యలకు)

విషయం : తొమ్మిది అంకెల వరకు గల సంఖ్యలకు పట్టిక పద్ధతిలో ఘనమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు : 1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి తొమ్మిది అంకెలు గల సంఖ్యకు ఘనమూలమును కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.

2. ఈ పద్ధతి ఏడు అంకెలు గల సంఖ్యకు, ఎనిమిది అంకెలు గల సంఖ్యకు కూడా ఘనమూలములను కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.

3. ఇందులోని రాబోయే ఘనమూలము మూడు అంకెలను మించి ఉండదు.

4. ఈ పద్ధతి భిన్నములేని, పూర్ణాంకములుగల ఘనములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

పద్ధతి :-

1. ఈ పద్ధతిలో మూడు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది. అందులో మొదటి రెండు పట్టికలను తయారుచేసే పద్ధతి ఇంతకు పూర్వమే వివరించబడింది.

2. **పట్టిక -3 కు సంబంధించిన వివరాలు :**

ఈ క్రింది పట్టికను గుర్తు ఉంచుకోవాలి.

M	N
0	0
1	1
2	7
3	9
4	5
6	8
7	6
8	2
9	4
10	10

3.(ఎ) ఇచ్చిన సంఖ్య (అనగా, ఘనము) లోని అంకెలను (కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు అనగా, ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయాలి.

(బి) ఇచ్చిన సంఖ్యలో ఏడు నుండి తొమ్మిది అంకెల వరకు ఉన్నప్పుడు మూడు గ్రూపులు ఏర్పడుతాయి.

(సి) అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపు x అనియు, మధ్యలో ఉన్న గ్రూపును y అనియు, కుడివైపున ఉన్న గ్రూపును z అనియు అనుకొందాము.

(డి) ఇచ్చిన సంఖ్య (=ఘనము) = x y z అని వ్రాసుకోవచ్చు.

4. ఘనమూలమును సాధించుటకు ముందుగా ఎడమవైపు అంకెను తరువాత కుడివైపు అంకెను, తరువాత మధ్య అంకెను సాధించాలి.

5. **ఘనమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను సాధించుట :**

x గ్రూపులోని సంఖ్యను ఘనపు సంఖ్యగా భావించి, పట్టిక –1 సహాయంతో, ఆ సంఖ్యకు సంబంధించిన ఘనమూలపు అంకెను గుర్తించాలి. దానిని 'a' అనుకొందాము.

6. ఘనమూలములోని కుడివైపు అంకెను సాధించుట :

z గ్రూపులోని సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను గ్రహించి, దానికి సంబంధించిన ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకెను పట్టిక –2 సహాయంతో గుర్తించాలి. దీనిని 'c' అనుకొందాము.

7. ఘనమూలములోని మధ్య అంకెను సాధించుట

ఎ. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన ఘనము సంఖ్యను మరల గమనించాలి.

బి. ఆ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి బేసి స్థానంలో ఉన్న అంకెలను కూడాలి. దానిని K అనుకొందాము.

సి. ఇచ్చిన సంఖ్యలోని సరిస్థానాలలో ఉన్న అంకెలను కూడాలి. దానిని L అనుకొందాము.

డి. K విలువను L నుండి తీసివేయాలి. దానిని M అనుకొందాము.

$M = K - L$

ఇ. ఇప్పుడు వచ్చిన M విలువను పట్టిక –3లో గుర్తించి, దానికి ఎదురుగా ఉన్న N విలువను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఇంతకు ముందు సాధించిన a ,c ల విలువలను కూడి, దానిని 'd' అనుకోవాలి.

$d = a + c$

జీ. d విలువను N తో పోల్చాలి.

d విలువ N కంటె తక్కువ ఉన్నచో d కి 11ను కలపాలి.

d విలువ N కంటె తక్కువ కానిచో d ను ఆ విధంగానే ఉంచాలి.

హేచ్. d నుండి N విలువను తీసివేయగా ఘనమూలములోని మధ్య అంకె వస్తుంది. దానిని b అనుకొందాము.

$b = d - N$

8. **సమాధానం** : ఘనమూలము కొరకు a,b,c ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఘనమూలము = a b c అగును.

ఉదాహరణ 1 :

92345408 అను సంఖ్యకు ఘనమూలమును కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 92345408
2. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా, ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 92

మధ్య గ్రూపు = y = 345

కుడివైపు గ్రూపు = z = 408

3.ఎ. ముందుగా ఎడమవైపు గ్రూపు (=× గ్రూపు) లోని సంఖ్యను (=92) విశ్లేషించాలి.

బి. × గ్రూపులోని సంఖ్య (=92) ను పట్టిక –1 లోని ఘనము విలువతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 92 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 92 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 64

92 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 125

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్య (=64) న గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=64) ఘనముగా భావించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి(=4). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

జీ. ఘనమూలములోని ఎడమవైపు అంకె a=4

4. ఎ. తర్వాత కుడివైపు గ్రూపు (= z గ్రూపు) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

బి. z = 408

సి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె = 8

డి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదురుగా ఇచ్చిన ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె (=2)ను గ్రహించాలి. దానిని 'c' గా వ్రాసుకోవాలి.

ఇ. ఘనమూలములోని కుడివైపు అంకె =c=2

5. ఘనమూలములోని మధ్య అంకెను సాధించుట.

ఎ. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన ఘనము సంఖ్య = 92345408

బి. ఈ సంఖ్యలోని బేసి స్థానాలలోని (ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి) అంకెలను కూడాలి.

K=8+4+4+2 = 18

సి. అదే విధంగా సరిస్థానాలలోని అంకెలను కూడాలి.

$L=0+5+3+9=17$

డి. K నుండి L ను తీసివేయాలి.

$M= K-L = 18-17=1$

ఇ. పట్టిక –3 సహాయంతో M (=1) విలువకు ఎదురుగా ఇచ్చిన N విలువను గ్రహించాలి. N=1

ఎఫ్. ఘనమూలములో, ఇంతకు ముందు సాధించిన a, c ల విలువలను కూడాలి.

$d=a+c=4+2=6$

జి. d విలువను N తో పోల్చాలి.

d విలువ (=6) N (=1) కంటే ఎక్కువ ఉన్నది. అందుచే d ను ఆ విధంగానే ఉంచాలి.

హెచ్. d నుండి N ను తీసివేయగా ఘనమూలములోని మధ్య అంకె b వస్తుంది.

$b =d-N$

$b = 6 -1 = 5$

6. సమాధానం :- ఘనమూలము కొరకు a,b,c లను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము = a b c

= 4 5 2

వివరణ :- ఈ పద్ధతిలో y గ్రూపులోని అంకెలను విశ్లేషించనవసరములేదు.

ఉదాహరణ2 : 665338617 అను సంఖ్యకు ఘనమూలము కనుగొనుము.

పద్ధతి :-

1. ఇచ్చిన సంఖ్య = 665338617
2. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్లస్థానం నుండి ప్రారంభించి, మూడేసి

అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా, ఈ క్రింది విధంగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు = x = 665

మధ్య గ్రూపు = y = 338

కుడివైపు గ్రూపు = z = 617

ఘనమూలములోని ఎడమవైపు అంకెను సాధించుట

3.ఎ. ముందుగా ఎడమవైపు గ్రూపు (=x గ్రూపు) లోని సంఖ్యను (=665) విశ్లేషించాలి.

బి. x గ్రూపులోని సంఖ్య (=665) ను పట్టిక –1 లోని ఘనము విలువతో పోల్చి చూడాలి.

సి. 665 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

డి. 665 కు దగ్గర్లో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 512

665 కు దగ్గర్లో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 729

ఇ. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్య (=512)ను గ్రహించాలి.

ఎఫ్. ఈ సంఖ్యను (=512) ఘనముగా భావించి, దాని ఘనమూలమును పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి(=8). దానిని 'a' గా వ్రాసుకోవాలి.

జీ. ఘనమూలములోని ఎడమవైపు అంకె a=8

ఘనమూలములోని కుడివైపు అంకెను సాధించుట

4.ఎ. తర్వాత కుడివైపు గ్రూపు (z గ్రూపు) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

బి. z = 617

సి. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకె = 7

డి. పట్టిక –2 సహాయంతో, పై అంకెకు ఎదరుగా ఇచ్చిన ఘనమూలములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె (=3)ను గ్రహించాలి. దానిని 'c' గా వ్రాసుకోవాలి.

ఇ. ఘనమూలములోని కుడివైపు అంకె =c=3

5. ఘనమూలములోని మధ్య అంకెను సాధించుట.

ఎ. ప్రశ్నలో ఇచ్చిన ఘనము సంఖ్య = 665338617

బి. ఈ సంఖ్యలోని బేసి స్థానాలలోని (ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి) అంకెలను కూడాలి.

K= 7+6+3+5+6=27

సి. అదే విధంగా సరిస్థానాలలోని అంకెలను కూడాలి.

L= 1+8+3+6=18

డి. K నుండి L ను తీసివేయాలి.

M =K- L = 27-18=9

ఇ. పట్టిక –3 సహాయంతో ఈ M (=9) విలువకు ఎదురుగా ఇచ్చిన N విలువను గ్రహించాలి. N=4

ఎఫ్. ఘనమూలములో, ఇంతకు ముందు సాధించిన a, c ల విలువలను కూడాలి.

d= a+c = 8+3=11

జి. d విలువను N తో పోల్చాలి.

d విలువ (=11) N (=4) కంటే ఎక్కువ ఉన్నది. అందుచే d ను ఆ విధంగానే ఉంచాలి.

హెచ్. d నుండి N ను తీసివేయగా ఘనమూలములోని మధ్య అంకె b వస్తుంది.

b =d-N

= 11 –4 = 7

6. **సమాధానం :–** ఘనమూలము కొరకు a,b,c లను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకోవాలి.

ఇచ్చిన సంఖ్యకు ఘనమూలము = a b c

= 8 7 3

90. చతుర్ధ ఘాతాంకమూలములు

విషయం : చతుర్ధ ఘాతాంకమూలమును కనుగొనుట

పద్ధతి : $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

పై సూత్రమును వినియోగించవలెను.

ఘనమూలమును కనుగొనుటలో చేసినట్లుగానే, a,a^4 పట్టికను సిద్ధం చేసి ఉంచుకోవాలి. (ప్రధానమైన అంశములను గుర్తుంచుకొనవలెను. పేజి.నెం18)

ఉదాహరణ : 331776 యొక్క చతుర్ధ ఘాతాంకమూలము (Fourth order Root)**ను కనుగొనుము.**

$a^4 = 2^4 = 16$	3 $\dot{3}$ 1 7 7 $\dot{6}$	a = 2
	1 6	సమాధాన పంక్తి = 2
$4a^3=4*2^3=32$	1 7 1	b = 5
$4a^3b = 32*5=160$	1 6 0	(నిర్ధారించవలసి ఉన్నది.)
	1 1 7	
$6a^2b^2 = 6*4*25=600$	6 0 0	(నిర్ధారించబడలేదు)
	1 7 1	b = 4
$4a^3b = 32*4=128$	1 2 8	(నిర్ధారించవలసి ఉన్నది.)
	4 3 7	
$6a^2b^2 = 6*4*16=384$	3 8 4	
	5 3 7	
$4ab^3 = 4*2*4^3=512$	5 1 2	
	2 5 6	
$b^4 = 4^4=256$	2 5 6	
	0	
		b = 4 నిర్ధారించబడినది
		సమాధాన పంక్తి = ab = 24

331776యొక్క చతుర్ధ ఘాతాంకమూలము (Fourth order Root) = 24

91. పంచమ ఘాతాంకమూలములు - 1 (సాధారణ పద్ధతి)

పద్ధతి : $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

పై సూత్రమును వినియోగించవలెను.

చేయవలసిన ప్రధానమైన అంశాలు. ః 1. చుక్కలు పెట్టుట, 2. $(a+b)^5$ అనే సూత్రాన్ని వ్రాసుకొనుట, 3. (a,a^5) పట్టికను సిద్ధంచేసికొని ఉంచుట, 4. a^5ను కనుగొనుట, 5. b ను కనుగొనుట 6. అంకెలను దించుకొంటూ $5a^4b, 10a^3b^2, 10a^2b^3, 5ab^4, b^5$ లను తీసివేయుట, 7. a,b లను ప్రక్కప్రక్కన వ్రాసుకొనుట.

ఉదాహరణ : 2476099 యొక్క పంచమ ఘాతాంకమూలము
(Fifth order Root)ను కనుగొనుము.

$a^5 = 1^5 = 1$	2 $\dot{4}$ 7 6 0 9 $\dot{9}$	a = 1
	1	సమాధాన పంక్తి = 1
$5a^4=5*1^4=5$	2 3 7	b = 9
$5a^4b= 5*1*9= 45$	4 5	(నిర్ధారించవలసి ఉన్నది.)
	1 9 2 6	
$10a^3b^2 = 10*1*81=810$	8 1 0	
	1 1 1 6 0	
$10a^2b^3 = 10*1*729=7290$	7 2 9 0	
	3 8 7 0 9	
$5ab^4= 5*1*9^4= 32805$	3 2 8 0 5	
	5 9 0 4 9	
$b^5 = 9^5=59049$	5 9 0 4 9	b = 9 నిర్ధారించబడినది
	0	సమాధాన పంక్తి = ab = 19

2476099 యొక్క పంచమ ఘాతాంకమూలము (Fifth order Root) = 19

92. పంచమ ఘాతాంకమూలములు-2 (పట్టిక పద్ధతి)

విషయం :- పట్టిక పద్ధతితో పంచమ ఘాతాంకమూలములను కనుగొనుట.

విశేషాలు :-

1. ఇక్కడ వివరించబడే పద్ధతి 10 అంకెలకు మించని సంఖ్యకు ఘాతాంకమూలమును కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తుంది.
2. ఈ పద్ధతి, భిన్నములు లేని, పూర్ణాంకములు గల, పంచమ ఘాతాంక మూలములకు మాత్రమే వర్తిస్తుంది.
3. ఇందులో రాబోయే పంచమ ఘాతాంకమూలము రెండు అంకెలను మించి ఉండదు.

పద్ధతి : 1. ఈ పద్దతిలో రెండు పట్టికలను వినియోగించవలసి ఉంటుంది. వీటిని తయారు చేసే పద్ధతి ఇక్కడ వివరించబడుతోంది.

పట్టిక -1 ను తయారు చేయుట :

a. 1 నుండి 10 వరకు గల సంఖ్యల పంచమ ఘాతాంక విలువలను కనుగొనండి.

b. అనగా, ఇప్పుడు లభించిన ఘాతాంక సంఖ్యలకు 1 నుండి 10 వరకు గల సంఖ్యలు, అదేక్రమంలో ఘాతాంక మూలములవుతాయి.

c. ఈ ఘాతాంక సంఖ్యలను మొదటి నిలువు వరుసలోను, వీటికి సంబంధించిన ఘాతాంకమూలములను రెండవ నిలువు వరుసలోను ఉండునట్లు ఒకపట్టికను తయారు చేయాలి. (పట్టిక -1)

పట్టిక :1

1 నుండి 10 వరకు సంఖ్యల ఘాతాంకములు, 5వ ఘాతాంకమూలము

సంఖ్య (5 వ ఘాతాంక సంఖ్య)	5వ ఘాతాంకమూలము
1	1
32	2
243	3
1024	4
3125	5
7776	6
16807	7
32768	8
59049	9
100000	10

2.పట్టిక –2 ను తయారు చేయుట

a. పట్టిక –1 సహాయముతో, పంచమ ఘాతాంక సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెకు, 1నుండి 9 వరకు ఉన్న అంకెలకును ఉన్న సంబంధమును చూపించు ఒక పట్టికను తయారు చేయాలి. (పట్టిక–2)

పట్టిక -2 : పట్టిక -1 సహాయముతో తయారయిన పంచమ ఘాతాంకసంఖ్య, పంచమ ఘాతాంకమూలములలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెలు :

పంచమ ఘాతాంక విలువలోని ఒకట్లస్థానములోని అంకె	పంచమ ఘాతాంకమ్లూములోని ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
0	0

b. ఈ పట్టిక -2 ను పరిశీలించగా, ఘాతాంక సంఖ్య యొక్కయు, ఘాతాంకమూలము యొక్కయు ఒకట్ల స్థానములోని అంకెలు ఒకే విధంగా ఉన్నవి.

3. a. ఇచ్చిన సంఖ్య (అనగా,ఘాతాంక సంఖ్య) లోని అంకెలను కుడివైపు నుండి ఎడమవైపునకు, అనగా ఒకట్ల స్థానం నుండి ప్రారంభించి, ఐదేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా విడదీసి వ్రాయలి.

b. ఇచ్చిన సంఖ్యలో పది అంకెలలోపు ఉన్నపుడు రెండు గ్రూపులు మాత్రమే ఏర్పడతాయి.

c. అందులో ఎడమవైపున ఉన్న గ్రూపుకు x గ్రూపు అనియు, కుడి వైపున

ఉన్న గ్రూపును Y గ్రూపు అనియు అనుకొందాము.

d. ఇచ్చిన సంఖ్య (= పంచమ ఘాతాంక సంఖ్య) =xyఅని వ్రాసుకోవచ్చును.

4. a. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

b. x గ్రూపులోని సంఖ్యను పట్టిక 1 లోని 5వ ఘాతాంక సంఖ్య విలువలతో పోల్చి చూడాలి.

c. x గ్రూపులోని సంఖ్యకు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

d. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను చిన్న సంఖ్యను గ్రహించాలి.

e. ఈ చిన్న సంఖ్యను ఘాతాంక సంఖ్యగా భావించి , దాని ఘాతాంక మూలమును, పట్టిక –1 నుండి తీసుకోవాలి. దానిని 'P' గా వ్రాసుకోవాలి.

5. a. ఇప్పుడు,ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపుగ్రూపు (=Y) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

b. ఈ సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానంలో ఉన్న అంకెను గుర్తించాలి.

c. పట్టిక –2 ప్రకారము, 5వ ఘాతాంకమూలము యొక్క ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె కూడా అదే అగును. దానిని 'Q' గా తీసుకోవాలి.

6. ఇప్పుడు P,Q ల విలువలను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు 5వ ఘాతాంకమూలము వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1 :– 335 54432 యొక్క 5వ ఘాతాంకమూలమును (Fifth order Root) కనుగొనుము.

పద్ధతి :

1. a. ఇచ్చిన సంఖ్య = 33554432

b. ముందుగా, ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను, కుడివైపునుండి అనగా, ఒకట్ల స్థానమునుండి, ఐదేసి అంకెల చొప్పున గ్రూపులుగా వ్రాయగా,ఈ క్రింది విధముగా వస్తాయి.

ఎడమవైపు గ్రూపు =X= 335

కుడివైపు గ్రూపు =Y= 54432

2. a. ముందుగా x గ్రూపులోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

   b. x గ్రూపులోని సంఖ్య (=335)ను పట్టిక –1 లోని 5వ ఘాతాంక విలువతో పోల్చి చూడవలెను.

   c. 335 కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్యను, పెద్ద సంఖ్యను గుర్తించాలి.

   d. 335కు దగ్గరలో ఉన్న చిన్న సంఖ్య = 243

   335కు దగ్గరలో ఉన్న పెద్ద సంఖ్య = 1024

   e. ఈ రెండు సంఖ్యలలోను, గ్రహించవలసినది= చిన్న సంఖ్య =243.

   f ఈ సంఖ్యను (=243ను) పంచమ ఘాతాంక సంఖ్యగా భావించి, దాని ఘాతాంకమూలము పట్టిక –1 నుండి తీసుకోగా వచ్చిన విలువ = 3. దీనిని 'P' గా వ్రాసుకోవాలి.

   P = 3

3. a. ఇప్పుడు, ఇచ్చిన సంఖ్యకు సంబంధించిన కుడివైపుగ్రూపు (Y) లోని సంఖ్యను విశ్లేషించాలి.

   b. **Y** = 54432

   c. ఈ సంఖ్యలో ఒకట్లస్థానంలో ఉన్న అంకె =2

   d. పట్టిక –2 ప్రకారము, ఇదే సంఖ్య 5వ ఘాతాంకమూలములో కూడా ఒకట్లస్థానంలో అంకె (=2) అవుతుంది.

   దానిని '**Q**' గా వ్రాసుకోవాలి.

4. ఇప్పుడు P(=3) ,Q(=2)లను ప్రక్క ప్రక్కన వ్రాసుకొనగా, ప్రశ్నలో ఇచ్చిన సంఖ్యకు 5 వ ఘాతాంకమూలము (Fifth Root) అవుతుంది.

5. సమాధానం :– ఇచ్చిన సంఖ్యకు 5వ ఘాతాంకమూలము = PQ

   =32

   $(335\ 54432)^{1/5}$ =32

93. అనుబంధం

అంకెలతో సరదాగా ఆలోచించండి!

గణిత ప్రక్రియలను (+,−,×,÷) వినియోగిస్తూ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 అనే అంకెలను వాడుతూ విలువ 100 వచ్చేట్లు చేయాలి.

నియమాలు:

1. ఒక్కొక్క అంకె ఒక్కసారి మాత్రమే రావాలి.
2. మనం ఇచ్చే సమాధానంలో వాడే సంఖ్యలలోని అంకెలు 1 లగాయతు 9 వరకు అదే వరుసలోనే కన్పించాలి.
3. సంఖ్యలలో ఒక అంకెగాని, అంతకంటే ఎక్కువ అంకెలుగాని ఉండవచ్చు.

కొన్ని ఉదాహరణలు :-

1. $1+2+3+4+5+6+7+(8\times9) = 100$
2. $1\times2\times3\times4+5+6+(7\times8)+9 = 100$
3. $12+3+4+5-6-7+89 = 100$
4. $1+2+3-4+5+6+78+9 = 100$

తీసివేత - హాస్య సంఘటన

ఒక గురువుగారు ఒక వృద్ధ శిష్యుడికి తీసివేత వివరిస్తున్నారు. 32−9=?

2 లో నుండి 9 ని తీసివేయాలి. 2లో 9 పోవదు. అందుచేత 2 ప్రక్కన ఉన్న 3 నుండి ఒక పదిని అప్పు తెచ్చుకో. దానిని 2కి కలుపు. 12 అవుతుంది. అందులో నుండి 9 ని తీసివేయి. 3 మిగులుతుంది. దానిని సమాధానంలో ఒకట్ల స్థానంలో వేసుకో.

సమాధానం = 23.

ఇదంతా విన్నాక, ఆ వయస్సు మీరిన విద్యార్థి అడిగాడు.

సార్ ! 2 లో నుండి 9 తీసేయడానికి ఒక 10 అప్పు తెచ్చారు కదా !

ఆ అప్పు ఎప్పుడు తీరుస్తారు ?

ఎవరు తీరుస్తారు ? అప్పు తీర్చకపోవడం పాపం కదా !

అప్పు ఈ జన్మలో తీర్చకపోతే, మళ్ళీ జన్మ ఎత్తాలి కదా ! ఏమిటీ ఈ ఋణానుబంధం?”

అంకెలతో శ్రీరాముని వర్ణన

సుందరకాండలో – సీతాదేవిని చూచిన హనుమంతుడు చెట్టుదిగి, దగ్గరకు వస్తున్నకొలది, ఆమె అతనిని రావణాసురునిగా శంకించసాగింది. తాను శ్రీరాముని దూతనే అని చెప్పిన హనుమంతునితో సీతాదేవి శ్రీరాముని లక్షణాలను వివరంగా వర్ణించమని అంటుంది. అపుడు హనుమంతుడు శ్రీరాముణ్ణి అంకెల సహాయంతో సాంకేతికంగా వర్ణిస్తాడు. అందులో ఒక శ్లోకం ఇట్లా ఉంది. (వాల్మీకి రామాయణం – సుందరకాండ – 35–17)

"త్రిస్థిరః త్రిప్రలంబశ్చ త్రిసమః త్రిషుచోన్నతః ।

త్రితామ్రః త్రిషుచస్నిగ్ధో గంభీరః త్రిచ నిత్యశః ॥"

శ్రీరాముడు మూడింటి యందు స్థైర్యము కలవాడు (వక్షస్థలము, ముంజేయి, పిడికిలి)

– సాముద్రిక శాస్త్ర ప్రకారం ఇది రాజలక్షణం

మూడింటి యందు దీర్ఘత్వము కలవాడు (కనుబొమ్మలు, ముష్కములు, బాహువులు)

ఇది ధనిక లక్షణం

మూడింటియందు సమముగా ఉన్నవాడు (తలవెంట్రుకలు, ముష్కములు, మోకాళ్ళు)

– ఇది రాజలక్షణం

మూడింటి యందు ఎత్తైనవాడు (బొడ్డు, క్రింది కడుపు, వక్షస్థలము)

– ఇది కూడ రాజలక్షణం

మూడింటియందు ఎఱ్ఱగా ఉన్నవాడు (నేత్రాంతములు, గోళ్ళు, అరచేతులు & అరకాళ్ళు)

– ఇది సుఖవంతుని లక్షణం

మూడింటి యందు నునుపు కలవాడు (పాదములయందున్న రేఖలు, తలవెంట్రుకలు, లింగమణి)

– ఇది మహాభాగ్యవంతుని లక్షణం

మూడింటి యందు గంభీరుడు (కంఠధ్వని, నడక, నాభి)

– ఇది ప్రశంసాపాత్రుని లక్షణం.

కర్మఫలం - గుణకారం

కర్మ సిద్ధాంతం మన సనాతన ధర్మానికి పునాది. దీనిని కొంచెం లోతుగా ఆలోచిస్తే కొన్ని విచిత్ర విషయాలు స్ఫురిస్తాయి.

1. వేదంలో (నమకంలో) "వాణిజాయ" అనే పదం ఉంది. "చేసుకున్నవానికి చేసుకున్నంత, మహదేవా" అనే సామెత కూడా ఉంది. జీవుడు చేసిన కర్మను పరిశీలించి, సరిగ్గా తూకం వేసినట్లు ఫలితాన్ని ఇస్తాడని ఈశ్వరుణ్ణి షాహుకారుగా వర్ణిస్తుంది. వేదం ! ఒక రూపాయి దానం చేస్తే ఒక రూపాయికి సరిపడే పుణ్యఫలం, ఒక అరటిపండు దానం చేస్తే, ఆ అరటిపండుకు సరిపడే పుణ్యఫలం మాత్రమే ఇస్తాడని పై వాక్యాలకు అర్థం.

అంటే ఒక వంతు కర్మకు ఒక వంతు కర్మఫలం వస్తుంది అని అర్థం.

2. కాని, యజుర్వేద భాష్యంలో శ్రీ సాయణాచార్యులవారు ఇట్లన్నారు.

"నిర్ధనికుడు తన ప్రభువుకు నేరేడు పండువంటి చిరుకానుకలను సమర్పించి వేలాది రెట్లు విలువ చేసే ధనాన్ని కోరుకుంటాడు. అదే విధంగా భక్తుడు కొద్దిపాటి నైవేద్యాన్ని సమర్పించి, అనంత భోగభాగ్యాలను కోరుకుంటాడు. మరి, కర్మ సిద్ధాంతరీత్యా ఒక వంతు కర్మకు ఒక వంతు కర్మఫలం మాత్రమే లభిస్తుందని చెప్పినపుడు అనేక రెట్లు విలువ గల భాగ్యం ఎట్లా వస్తుంది ? దానికి సమాధానం – "మంత్ర సామర్థ్యేన వర్ధత్వాత్" (మంత్రబలం చేత కర్మఫలం వృద్ధి పొందడం వలన) అని అంటారు. ఇక్కడ కర్త తనకు రావలసిన పుణ్య కర్మఫలాన్ని అనేకరెట్లు "అధికీకృత్య" పెంచుకొని, పెంచుకొని "గుణకారాన్ని" కోరుకుంటున్నాడు.

3. అదే విధంగా పాపకర్మ విషయంలో రావలసిన కర్మ ఫలాన్ని అనేకరెట్లు "ఊనీకృత్య" తగ్గించి, తగ్గించి, అంటే "భాగహారాన్ని" కోరుకుంటున్నాడు.

4. అందుకే, ఒకే కర్మకు, పర్వదినాలను బట్టి, యాత్రాక్షేత్రాలను బట్టి, పరమేశ్వరుని అనుగ్రహాన్ని బట్టి కర్మఫలం వేరు వేరుగా ఉంటుందని పెద్దలు చెబుతారు.

మంత్ర పుష్పంలో గణిత మంత్రం !

జగద్గురు శ్రీ పూరీ శంకరాచార్యుల వారు తమ వైదిక గణిత గ్రంథంలో వివరించిన "ఊర్ధ్వ తిర్యగ్భ్యామ్" అనే గణిత సూత్రం మన పూజలలో చివరన పఠించే యజుర్వేదంలోని "మంత్ర పుష్పం"లో కొద్దిపాటి మార్పులతో కన్పిస్తుంది.

"తిర్య గూర్ధ్వ మధఃశాయిా (తిర్యక్+ఊర్ధ్వం)

రశ్మయస్తస్య సంతతా"

తాత్పర్యం : "(జ్యోతిస్స్వరూపుడైన) ఆ పరమాత్మ యొక్క కిరణాలు అడ్డంగాను, నిలువుగాను, క్రిందకీ నిరంతరం ప్రసరిస్తున్నాయి."

శ్రీ శంకరులు చెప్పిన కథ "దశమః త్వమసి"

ఒక పది మంది నది దాటవలసి వచ్చింది. నది ఎక్కువ లోతులేదు కాని, వడి ఎక్కువగా ఉంది. జాగ్రత్తగా దిగి, అందరూ నది దాటేరు. నది దాటడంలో ఎవరూ మునిగి పోలేదని నిశ్చయించుకోవడానికి వాళ్ళంతా వరుసలో నిలబడి లెక్కపెట్టడం ప్రారంభించేరు. ప్రతీవాడు మిగతా అందర్నీ లెక్కపెడుతూన్నాడు, తనను తప్ప. అందరికీ 9 అనే సమాధానం వస్తుంటే, పదోవాడు మునిగిపోయాడని అనుకొని అందరూ దుఃఖిస్తూ ఉంటారు.

దూరం నుంచి చూస్తున్న ఒక జ్ఞాని వీళ్ళ దగ్గరకు వచ్చి, వారి అజ్ఞానాన్ని గమనించి, అంటాడు పదోవాడివి నీవేనని తెలుసుకో (దశమః త్వమసి)

అజ్ఞానమే దుఃఖానికి కారణం

నిన్ను నీవు తెలుసుకొనినపుడే సంపూర్ణ జ్ఞానివి అవుతావు.

జ్ఞాన ప్రాప్తి ద్వారా మాత్రమే దుఃఖనివృత్తి అవుతుంది.

సంఖ్య 'ఒకటి' విశిష్టత

సంఖ్యలు ఎన్ని ఉన్నాయి ?
అనేకం ! (న+ఏకం=ఒకటి కాదు)
అంటే చాలా ఉన్నాయని అర్థం.
'1' నిరపేక్షమైనది.
మిగిలిన సంఖ్యలు 2,3 మొదలైనవన్నీ కూడా సాపేక్షమైనవే !
న్యాయశాస్త్రంలో ఈ ఏకత్వాన్ని 'జాతి' వాచకంగా పేర్కొంటారు.
నల్లని ఆవు, తెల్లని ఆవు, ఎర్రని ఆవు – ఇవి వేరువేరుగా కన్పిస్తున్నా నల్ల ఆవులోని 'గోత్వం', తెల్ల ఆవులోని 'గోత్వం', ఎర్ర ఆవులోని 'గోత్వం' – ఇది మాత్రం ఒక్కటే !

గోజాతి ఒక్కటే !
భారతీయులు 100 కోట్ల పైన ఉన్నా
భారతీయత ఒక్కటే !

పూర్ణత్వము

1+1=2 : 2+1=3

ఇట్లా కలుపుకుంటూ పోతూ ఉంటే, ఎక్కడైనా ఆగుతుందా ? ఆగదు. కారణం – దీనికి అంతం లేదు. అదే అనంతం. (Infinity)

ఈ అనంతంలో నుండి కొంత సంఖ్యను తీసివేస్తే అనంతం తగ్గుతుందా ? లేదు అనంతమే మిగులుతుంది.

దీనికి మన ఋషులు ఇచ్చిన మంత్ర వాక్యము.

"పూర్ణ మదః పూర్ణ మిదం పూర్ణాత్ పూర్ణముదచ్యతే ।
పూర్ణస్యపూర్ణమాదాయ పూర్ణమేవావశిష్యతే"
అనంతానికి అనంతాన్ని కలిపితే అనంతం వస్తుంది.
అనంతంలోని నుండి అనంతాన్ని తీసేస్తే,
అనంతం మిగులుతుంది.

టి.వి. చిత్రాల నంది బహుమతుల ప్రదానోత్సవం
2008
08-05-2010, లలితకళా తోరణం, హైదరాబాద్
ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర చలనచిత్ర, టీ.వి. &
నాటక రంగ అభివృద్ధి సంస్థ

SHRI VEDA BHARATHI (Regd. 1994)
(A Public Charitable Trust Dedicated for Research in Vedas & Sanskrit)
PROJECTS SPONSORED BY GOVT. OF INDIA
"H" Block-34, Madhura Nagar, Hyderabad-500 038. Cell: 9849459316

Shri Veda Bharathi Publications (TELUGU)

1. Vedic Mathmatics, Lilavathi Ganitham & Paavuluri Ganitham
2. Bharatiya Ganitha Sastra Charitra
3. Sri Durga Saptasati (Chandi) Homavidhanam
4. Sahasralingarchana
5. Upanishad Ratnavali (11 Upanishads) (Set of 4 books)
6. Shad Darsanamulu
7. Jyotisha in Ramayana (Swapna, Sakuna,Saamudrika and Muhurta Sastras)
8. Mana Samasyalu-Parishkaralaku Veda Mantralu
9. Predictability of Earth Quakes Using Jyotisha Sastra
10. Vaikhanasagama Samkshipta Parichayam
11. Atiratra Mahayaga Samkshipta Parichayam
12. Godavari Pushkarala Samkshipta Parichayam
13. Veda Sastrala Samkshipta Parichayam
14. Upanishattula Samkshipta Parichayam
15. Bhagavad Gita Samkshipta Parichayam
16. Upanayana Samskara Samkshipta Parichayam
17. Vivaha Samskara Samkshipta Parichayam
18. Adi Sankaracharya
19. Sri Bagavad Ramanujacharya
20. Sri Madhwacharya
21. Vinayaka Sahasranamavali
22. Veda Ganitam (Braille Script) with Audio CD (for Blind Students and Youth)
23. Krishna Yajurveda (Taittiriya Sakha) Vaibhavam

ENGLISH

24. Vedic Mathmatics, Lilavathi Ganitham & Paavuluri Ganitham
25. Science and Technology in Vedas and Sastras
26. Vedas and Computers (Computers Science in Vedas)
27. Upanishad Ratnavali (11 Upanishads) (Set of 4 Books)
28. Heritage Education (A brief study of Vedas & Sastras)
29. The Splendour of Krishna Yajurveda - A Monograph
30. Veda Ganitam (Braille Script) with Audio CD (for Blind Students and Youth)
31. A Brief Introduction to Vedas & Sastras

Shri Veda Bharathi Vedic CDs, DVDs (Audio/Video)

1. Vedic Mathematics, Lilavathi Ganitham, Pavuluri Ganitham Video DVDs (Telugu)
2. Vedic Mathematics, Lilavathi Ganitham, Pavuluri Ganitham Video DVDs (English)
3. Entire Rigveda Samhita with introductions to all the 64 Chapters(English)

   Rigveda Samhita - Moolam - 1 DVD (mp3) (Audio)
4. Rigveda Samhita - Padapatham - 1 DVD (mp3) (Audio)
5. Rigveda Samhita - Kramapatham - 1 DVD (mp3) (Audio)
6. Rigveda Samhita - Sikhapatham - 2 DVDs (mp3) (Audio)
7. Rigveda - Brahmana, Aranyaka, Aitareyopanishad, Brihadaranyakopanishad-1 DVD (mp3) (Audio)
8. 11 Types of chantings of Rigveda (1,2,3 chapters) - 2 DVDs-mp3(Audio) (Moolam(Samhita),Pada, Krama,Jata,Mala, Sikha, Rekha, Dhwaja,Danda, Ratha & Ghana)
9. Abhisheka, Shanti Mantras, Arunam & Upanishads-1 CD- (mp3) (Audio) Namakam, Chamakam, Manyu Suktam, PurushaSuktam, SriSuktam, MantraPushpam, LaghuNyasam, Mahanyasam, Graha Santi, Nakshtra Santi, Arunam,Upanishads (Isa, Katha, Mandukya, Aitareya, Taittiriya (Siksha, Ananda valli, Bhriguvalli, Maha Narayana)
10. Kamyas- 1 CD-(mp3) (Audio)
    Repeated chantings of selected mantras
    for solving common problems (listed in website)
11. Selected Chantings of Krishna Yajurveda (Taittiriya Samhita) Chapter 1 of Kanda 1(Moolam, Pada, Krama, Jata and Ghana); Chapter 1 of Kanda 3 (Moolam)
12. Brahma Sutra Sankara Bhashya Pathamulu-2 DVDs- (mp3)(Audio) by "Mahamahopadhyaya" Prof. Pullela SriRamachandrudu garu (Part 1)(Telugu)
13. Veda Samraksha – 1 DVD-(Video)
    1. Need for preservation of Vedas (English & Telugu)
    2. About the 11 types of chantings of Rigveda
    3. About Multimedia Graphics of Vedic Mantras
    4. 12 Jyotirlingas & Multimedia for Vedic Mantras

Note: Mailing charges are extra.

For details contact Ph.: 09849459316